ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դավթյան Նարինե Նվերի

Որոշ դասերի գրաֆների ճիշտ կողային ներկումների բազմության մեջ միջակայքային սպեկտրով գագաթների թվի էքստրեմալ արժեքների մասին

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2015

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Давтян Нарине Нверовна

Об экстремальных значениях числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных раскрасок графов некоторых классов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван – 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ.Ռ. Քամալյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Գ. Գրիգորյան
	ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ի.Ա. Կարապետյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2015թ. հունիսի 19-ին, ժ. 14^{30}-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 “Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2015 թ. մայիսի 15-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր՝ Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель:	кандидат физ.-мат. наук Р.Р. Камалян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Ю.Г. Григорьян
	кандидат физ.-мат. наук И.А. Карапетян
Ведущая организация:	Институт информатики и проблем автоматизации НАН РА

Защита состоится 19-го июня 2015 г. В 14^{30} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 15-го мая 2015 г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования задач об интервальных реберных раскрасках графов ведутся, в основном, в направлениях вопросов их существования и построения, а также нахождения нижних и верхних оценок возможного числа цветов в таких раскрасках. Известно, что интерес к интервальным реберным раскраскам графов обусловлен как их теоретическим значением (достаточно отметить, что в случае кубического графа задача о существовании интервальной реберной раскраски эквивалентна задаче определения хроматического класса), так и возможностью их использования при математическом моделировании задач существования и построения расписаний непрерывных производственных процессов, в частности, составления "безоконных" учебных расписаний и организации функционирования систем беспроводной связи.

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы G без кратных ребер и петель, для множеств вершин и ребер которых употребляются, соответственно, обозначения $V(G)$ и $E(G)$. Непустое конечное подмножество последовательных натуральных чисел называется интервалом. Мощность произвольного конечного множества A обозначается через $|A|$. Правильной реберной t-раскраской графа G называется функция $\varphi : E(G) \to \{1,\ldots,t\}$, при которой для любой пары e' и e'' смежных ребер их цвета $\varphi(e')$ и $\varphi(e'')$ различны, и для любого цвета i, $1 \le i \le t$, существует хотя бы одно ребро цвета i. Наименьшее значение t, при котором существует правильная реберная t-раскраска графа G, обозначается через $\chi'(G)$. Множество всех правильных реберных t-раскрасок графа G обозначается через $\alpha(G,t)$, и пусть $\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G,t)$. Если G – граф, $x \in V(G)$, $\varphi \in \alpha(G)$, то множество цветов, используемых в раскраске φ для ребер, смежных вершине x, называется спектром вершины x графа G при раскраске φ и обозначается через $S_G(x,\varphi)$, а число вершин, спектр которых является интервалом, обозначается через $f_G(\varphi)$. $\varphi \in \alpha(G)$ называется интервальной реберной раскраской графа G, если $f_G(\varphi) = |V(G)|$. Множество графов, для которых существует интервальная реберная раскраска, обозначается через $\mathfrak{N}$.

Известно, что задача о принадлежности кубического графа классу $\mathfrak{N}$ является NP-полной. Классу $\mathfrak{N}$ принадлежат полные двудольные графы и деревья. Классу $\mathfrak{N}$ принадлежат также графы Харари и «лестницы Мебиуса».

В ряде работ были установлены оценки для наименьшего и наибольшего возможного числа цветов в интервальных реберных раскрасках графов класса $\mathfrak{N}$, связанные с числовыми параметрами графов, в частности, числом вершин, диаметром, максимальной степенью вершины и др. Отметим, что для графов, не входящих в класс $\mathfrak{N}$, некоторыми исследователями предложены методы оценивания их "близости" к $\mathfrak{N}$.

Поскольку, как было отмечено, для графов наиболее важных классов задача об их принадлежности классу $\mathfrak{N}$ является NP-полной, и существуют примеры как двудольных, так и недвудольных графов, не обладающих интервальной реберной раскраской, то становится важной задача изучения на множестве $\alpha(G)$ всех правильных реберных раскрасок графа G свойств функции $f_G(\varphi)$, выражающей число вершин с интервальным спектром, и, в частности, изучения ее экстремальных свойств. Формальной постановке задачи предпошлем необходимые определения и обозначения.

Для графа G и $\forall t \in N$, $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, положим

$$\mu_1(G,t) \equiv \min_{\varphi \in \alpha(G,t)} f_G(\varphi), \qquad \mu_2(G,t) \equiv \max_{\varphi \in \alpha(G,t)} f_G(\varphi).$$

Содержательно, $\mu_1(G,t)$ и $\mu_2(G,t)$ представляют собой экстремальные значения числа вершин с интервальным спектром во множестве всех правильных реберных t-раскрасок графа G.

Для графа G положим:

$$\mu_{11}(G) \equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G,t); \qquad \mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G,t);$$

$$\mu_{21}(G) \equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G,t); \qquad \mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G,t).$$

Легко видеть, что параметры μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} корректно определены для любого графа. Очевидно, они представляют собой границы экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве всех правильных реберных t-раскрасок графа G при варьировании числа t цветов раскраски в интервале между хроматическим классом и числом ребер графа.

Заметим, что параметры $\mu_{12}(G)$ и $\mu_{21}(G)$ имеют также и теоретико-игровой смысл. Предположим, что ребра графа G окрашиваются в игре двух лиц с антагонистическими интересами и асимметричным распределением ролей. Первый игрок называет число цветов, в которые должны быть окрашены ребра графа G, а второй игрок окрашивает ребра G с использованием количества цветов, указанного первым игроком.

Если первый игрок стремится к максимизации числа вершин с интервальным спектром в окончательной раскраске ребер G, а второй игрок стремится к минимизации этого числа, то по окончании игры в G будет $\mu_{12}(G)$ вершин с интервальным спектром.

Если же при этом первый игрок стремится к минимизации числа вершин с интервальным спектром в окончательной раскраске ребер G, а второй игрок стремится к максимизации этого числа, то по окончании игры в G будет $\mu_{21}(G)$ вершин с интервальным спектром.

Заметим также, что знание точных значений рассматриваемых параметров может также представлять определенную ценность в задачах прогнозирования качества расписания, если выбор общей продолжительности расписываемого рабочего дня происходит с учетом многих факторов и, в частности, не зависит от воли составителя расписания. Так, владея точным значением $\mu_{21}(G)$, можно предсказать в наихудшем случае число участников производственного (учебного) процесса, для которых удастся обеспечить их непрерывную работу ("безоконное" расписание) – даже при самом неблагоприятном определении продолжительности рабочего дня.

Цель и задачи работы. Основной целью диссертационной работы является вычисление точных значений параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} для некоторых простейших внешнепланарных графов, «лестниц Мебиуса» и графа Петерсена.

Объект исследования. Объектом исследования выступают простые циклы, простые циклы с одной хордой, деревья, «лестницы Мебиуса» и граф Петерсена.

Методы исследования. Исследование осуществлено с использованием методов теории графов и комбинаторной оптимизации.

Научная новизна. Впервые в исследованиях по реберным раскраскам графов акцентирована важность задачи изучения экстремальных свойств функции, выражающей число вершин с интервальным спектром в правильных реберных раскрасках графов, и найдены точные значения границ экстремумов упомянутой функции для графов некоторых классов при варьировании числа цветов в раскраске. Все результаты работы являются новыми.

Практическая значимость полученных результатов. Материалы диссертации, использованные методы и полученные результаты имеют как теоретическое значение для теории графов, комбинаторной оптимизации и теории расписаний, так и практическое значение, связанное с математическим моделированием задач, в которых составление расписаний учебных или производственных процессов происходит в условиях воздействия антагонистических интересов заинтересованных сторон.

На защиту выносятся следующие положения.

1) существование регулярных внешнепланарных графов G, удовлетворяющих неравенству $\mu_{12}(G) < \mu_{21}(G)$, а также существование регулярных внешнепланарных графов G, удовлетворяющих неравенству $\mu_{21}(G) < \mu_{12}(G)$;

2) существование полиномиального алгоритма вычисления точного значения параметра $\mu_{12}(D)$ произвольного дерева D;

3) существование деревьев D с максимальной степенью вершины, рав-

ной 3, параметр $\mu_{12}(D)$ которых может превзойти число вершин экстремальных степеней в D более, чем на заранее заданную величину;

4) наличие подкласса кубических графов G, известных под названием «лестницы Мебиуса», для которых значение параметра $\mu_{21}(G)$ совпадает с теоретической верхней границей этого параметра в классе кубических графов;

5) наличие кубического графа P, известного под названием «граф Петерсена», на котором теоретическая верхняя граница параметром $\mu_{21}(P)$ не достигается;

6) эквивалентность для класса регулярных графов G утверждений об их интервальной раскрашиваемости, о равенстве хроматического класса графа максимальной из степеней его вершин, и о равенстве значения параметра $\mu_{12}(G)$ числу вершин графа G;

7) описание структуры подграфа, порожденного подмножеством вершин с интервальным спектром в правильных реберных $|E(G)|$-раскрасках графов G без висячих вершин.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Годичных научных конференциях Российско-Армянского (Славянского) университета (Ереван, 2008г., 2009г.), на 8-ой Алгебраической конференции Украины (Луганск, 2011г.), на общем семинаре ИПИА НАН РА, на CSIT-2013 (Ереван, 2013г.), на юбилейной конференции, посвященной 80-летию основания Гюмрийского государственного педагогического института (Гюмри, 2014г.), на семинарах и научных сессиях Иджеванского филиала ЕГУ, а также на семинаре кафедры дискретной математики и теоретической информатики ЕГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 97 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы (72 наименования).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, определены цель и задачи работы, указаны объект и методы исследования, обозначена научная новизна полученных результатов и их практическая значимость, дан краткий список выносимых на защиту положений и приведены сведения об апробации полученных результатов.

В первой главе даются основные определения и обозначения работы, формулируется исследуемая задача, приводятся некоторые вспомогательные результаты, и решается основная задача для ряда простейших внешнепланарных графов.

В §1.1 приводятся основные понятия и определения работы и формулируется исследуемая задача.

Множество вершин конечного неориентированного связного графа G без кратных ребер и петель обозначим через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Степень вершины $x \in V(G)$ графа G обозначаем через $d_G(x)$, а минимальную и максимальную из степеней вершин графа G – через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$, соответственно. Через $\chi'(G)$ обозначаем хроматический класс графа G.

Множества неотрицательных целых чисел и натуральных чисел обозначаем, соответственно, через Z_+ и N.

Для графа G и числа $i \in N$, где $1 \le i \le \Delta(G)$, положим $V^{(i)}(G) \equiv \{x \in V(G)/d_G(x) = i\}$, и пусть $\gamma(G) \equiv |V^{(1)}(G)|$, $\Gamma(G) \equiv |V^{(\Delta(G))}(G)|$.

Для вершин $x \in V(G)$ и $y \in V(G)$ через $d_G(x,y)$ обозначается расстояние между вершинами x и y в графе G. Для произвольного дерева G и двух любых его вершин x и y через $P_G(x,y)$ обозначаем простую цепь, соединяющую вершины x и y, через $VP_G(x,y)$ – множество вершин этой цепи, и обозначаем

$$intVP_G(x,y) \equiv VP_G(x,y) \backslash (\{x\} \cup \{y\}).$$

Множество ребер графа G, инцидентных вершине $x \in V(G)$, обозначим через $I_{G,e}(x)$.

Для графа G и любого подмножества $V_0 \subseteq V(G)$ через $G[V_0]$ обозначаем подграф графа G, порожденный подмножеством V_0 его вершин.

Для произвольного непустого конечного подмножества A множества N через $l(A)$ и $L(A)$ обозначаем, соответсвенно, его наименьший и наибольший элемент (аналогично, для произвольной непустой последовательности A натуральных чисел через $l(A)$ и $L(A)$ обозначаем, соответственно, ее наименьший и наибольший член). Непустое конечное подмножество A множества N называется интервалом, если из $l(A) \le t \le L(A)$, $t \in N$ вытекает $t \in A$. Интервал A с $|A| = p$ называем p-интервалом. Интервал A с $l(A) = q$, $|A| = h$ обозначаем через $Int(q,h)$.

Функция $\varphi : E(G) \to Int(1,t)$ называется правильной реберной t-раскраской графа G, если смежные ребра окрашены в различные цвета, и каждый цвет из $Int(1,t)$ использован хотя бы для одного ребра.

Через $\alpha(G,t)$ обозначим множество всех правильных реберных t-раскрасок графа G. Положим

$$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G,t).$$

Для $\forall\varphi \in \alpha(G)$ и произвольного подмножества $E_0 \subseteq E(G)$ ребер графа G положим $\varphi[E_0] \equiv \{\varphi(e)/e \in E_0\}$.

Если G – граф, $\varphi \in \alpha(G)$ и $x \in V(G)$ то множество $\varphi[I_{G,e}(x)]$ обозначим через $S_G(x,\varphi)$ и назовем спектром вершины x графа G при раскраске φ. Если G – граф, $\varphi \in \alpha(G)$, то пусть $V_{int}(G,\varphi) \equiv \{x \in V(G)/\ S_G(x,\varphi)$ интервал$\}$.

Для графа G и $\forall\varphi \in \alpha(G)$ положим $f_G(\varphi) \equiv |\{x \in V(G)/S_G(x,\varphi)$ есть $d_G(x)$ -интервал$\}|$. $\varphi \in \alpha(G)$ называется интервальной реберной раскраской графа G, если $f_G(\varphi) = |V(G)|$.

Для $\forall t \in N,\ t \geq 1$ через $\mathfrak{N}_t$ обозначим множество всех графов G, для которых существует интервальная реберная раскраска $\varphi \in \alpha(G,t)$, и пусть

$$\mathfrak{N} \equiv \bigcup_{t\geq 1} \mathfrak{N}_t.$$

Для графа $G \in \mathfrak{N}$ положим:

$$w(G) \equiv min\{t \in N/\ G \in \mathfrak{N}_t\}, \quad W(G) \equiv max\{t \in N/\ G \in \mathfrak{N}_t\}.$$

Для графа G и числа $t \in N$, $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, определим числа $\mu_1(G,t)$ и $\mu_2(G,t)$ следующим образом:

$$\mu_1(G,t) \equiv \min_{\varphi\in\alpha(G,t)} f_G(\varphi), \qquad \mu_2(G,t) \equiv \max_{\varphi\in\alpha(G,t)} f_G(\varphi).$$

Для графа G определим числа $\mu_{11}(G)$, $\mu_{12}(G)$, $\mu_{21}(G)$, $\mu_{22}(G)$ следующим образом:

$$\mu_{11}(G) \equiv \min_{\chi'(G)\leq t\leq|E(G)|} \mu_1(G,t); \qquad \mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G)\leq t\leq|E(G)|} \mu_1(G,t);$$

$$\mu_{21}(G) \equiv \min_{\chi'(G)\leq t\leq|E(G)|} \mu_2(G,t); \qquad \mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G)\leq t\leq|E(G)|} \mu_2(G,t).$$

Для $\forall n \in N,\ n \geq 2$, через P_n обозначаем граф, изоморфный простой цепи с n вершинами. Для $\forall n \in N,\ n \geq 3$, через C_n обозначаем граф, изоморфный простому циклу с n вершинами.

Для $\forall n \in N,\ n \geq 4$ и $\forall j$, удовлетворяющего неравенству $\lceil\frac{n}{2}\rceil + 1 \leq j \leq n-1$, определим граф $C_{n,j}$ следующим образом:

$$V(C_{n,j}) \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$
$$E(C_{n,j}) \equiv \{(x_1,x_n),(x_1,x_j)\} \cup \{(x_i,x_{i+1})/\ 1 \leq i \leq n-1\}.$$

При употреблении обозначений $d_G(x)$, $S_G(x,\varphi)$, $f_G(\varphi)$, $intVP_G(x,y)$ и $d_G(x,y)$ указание на граф в индексе будем опускать, если из контекста ясно, о каком именно графе идет речь.

Основной целью диссертационной работы является вычисление точных значений параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} для некоторых простейших внешнепланарных и кубических графов.

В §1.2 доказываются некоторые вспомогательные утверждения.

Утверждение 1.2.2 *Если G граф с $\delta(G) \geq 2$, $\varphi \in \alpha(G, |E(G)|)$, $V_{int}(G, \varphi) \neq \emptyset$, то $G[V_{int}(G, \varphi)]$ лес, каждая компонента связности которого есть простая цепь.*

Следствие 1.2.3 *Если G – регулярный граф с $\chi'(G) = \Delta(G)$, то $\mu_{12}(G) = |V(G)|$.*

Следствие 1.2.8 *Если G – кубический граф, и $\varphi \in \alpha(G, |E(G)|)$, то*

$$|V_{int}(G, \varphi)| \leq \left\lfloor \frac{3 \cdot |V(G)| - 2}{4} \right\rfloor.$$

Следствие 1.2.9 *Если G регулярный граф с $|E(G)| > 1$, то $\mu_{21}(G) \leq |V(G)| - 1$.*

Следствие 1.2.10 *Для любого регулярного графа G с $\chi'(G) = \Delta(G)$ и $|E(G)| > 1$ имеет место неравенство $\mu_{21}(G) < \mu_{12}(G)$.*

Теорема 1.2.1 *Для любого графа G верны неравенства*

1) $\mu_{11}(G) \leq \mu_{12}(G) \leq \mu_{22}(G)$, 2) $\mu_{11}(G) \leq \mu_{21}(G) \leq \mu_{22}(G)$.

Утверждение 1.2.5 *Если для графа G выполняются условия*

1) $G \in \mathfrak{N}$, 2) $w(G) = \Delta(G)$, 3) $W(G) = |E(G)|$,

4) для $\forall t$, удовлетворяющего неравенству $w(G) \leq t \leq W(G)$, $G \in \mathfrak{N}_t$,

то верно равенство $\mu_{21}(G) = \mu_{22}(G) = |V(G)|$.

Теорема 1.2.2 *Для регулярного графа G четыре утверждения эквивалентны: 1) $\chi'(G) = \Delta(G)$; 2) $G \in \mathfrak{N}$; 3) $\mu_{22}(G) = |V(G)|$; 4) $\mu_{12}(G) = |V(G)|$.*

Замечание 1.2.2 *Из теоремы 1.2.2 вытекает, что задача проверки равенства $\mu_{12}(G) = |V(G)|$ NP-полна для регулярных графов.*

В §1.3 вычислены точные значения параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} для простых цепей, простых циклов и простых циклов с одной хордой.

Утверждение 1.3.1 *Для $n \geq 2$ имеют место равенства*

$$\mu_{12}(P_n) = \mu_{21}(P_n) = \mu_{22}(P_n) = n,$$

$$\mu_{11}(P_n) = \begin{cases} 3, & \text{если } 3 \leq n \leq 4 \\ 2 & \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

Утверждение 1.3.2 *Для $k \geq 2$ имеют место равенства*

$$\mu_{12}(C_{2k}) = \mu_{22}(C_{2k}) = 2k, \qquad \mu_{21}(C_{2k}) = 2k - 1,$$

$$\mu_{11}(C_{2k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2 \\ 0, & \text{если } k \geq 3. \end{cases}$$

Утверждение 1.3.3 *Для $k \geq 1$ имеют место равенства*

$$\mu_{22}(C_{2k+1}) = \mu_{21}(C_{2k+1}) = 2k, \qquad \mu_{12}(C_{2k+1}) = 2,$$

$$\mu_{11}(C_{2k+1}) = \begin{cases} 2, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k \geq 2. \end{cases}$$

Замечание 1.3.1 *Из утверждений 1.3.2, 1.3.3 вытекает, что при $k \geq 2$ верны неравенства $\mu_{21}(C_{2k}) < \mu_{12}(C_{2k})$, $\mu_{12}(C_{2k+1}) < \mu_{21}(C_{2k+1})$. Это означает, что существуют графы G, для которых $\mu_{21}(G) < \mu_{12}(G)$, а также, что существуют графы G, для которых $\mu_{12}(G) < \mu_{21}(G)$.*

Теорема 1.3.1 *При любых $n \geq 4$ и j, удовлетворяющем неравенству $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq j \leq n-1$, имеют место соотношения*

$$\mu_{11}(C_{n,j}) = 0, \qquad \mu_{21}(C_{n,j}) = n-1, \qquad \mu_{22}(C_{n,j}) = n,$$

$$\mu_{12}(C_{n,j}) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно} \\ 4, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Во второй главе дается частичное решение основной задачи для деревьев. Именно, для произвольного дерева вычисляются точные зачения параметров μ_{11}, μ_{22} и μ_{12}, а также дается полиномиальный алгоритм вычисления последнего.

В §2.1 вычисляются точные значения параметров μ_{11} и μ_{22} произвольного дерева.

Утверждение 2.1.4 *Для любого дерева D с $|V(D)| \geq 2$ имеет место равенство*

$$\mu_{11}(D) = \begin{cases} 3, & \text{если } D \cong P_4 \\ \gamma(D), & \text{если } |V(D)| \geq 5 \text{ и } |V(D)| \geq \gamma(D) + 2 \\ |V(D)| & \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

Утверждение 2.1.6 *Для любого дерева D с $|V(D)| \geq 2$ имеет место равенство $\mu_{22}(D) = |V(D)|$.*

В §2.2 выводится формула вычисления точного значения параметра μ_{12} произвольного дерева.

Утверждение 2.2.7 *Для любого дерева G с $\Delta(G) \geq 4$ $\mu_{12}(G) = \gamma(G) + \Gamma(G)$.*

Для любого дерева G с $|V(G)| \geq 2$ положим:

$$R(G) \equiv \begin{cases} -2, & \text{если } \Delta(G) = 1 \\ 0, & \text{если } \Delta(G) = 2 \text{ или } \Delta(G) \geq 4 \\ \min\{|\{x \in V(G) / \ d_G(x) = 2,\ S_G(x,\varphi) \\ \text{является интервалом}\}| / \ \varphi \in \alpha(G,3)\}, & \text{если } \Delta(G) = 3. \end{cases}$$

Утверждение 2.2.11 *Для любого дерева G с $|V(G)| \geq 2$ $\mu_{12}(G) = \gamma(G) + \Gamma(G) + R(G)$.*

Из определения параметра $R(G)$ видно, что формула для $\mu_{12}(G)$, указанная в утверждении 2.2.11, позволяет вычислять точное значение этого параметра для деревьев G с $|V(G)| \geq 2$ и $\Delta(G) \neq 3$ за время $O(|V(G)|)$.

В §2.3 описывается алгоритм, основанный на принципе динамического программирования, который по любому дереву G с $\Delta(G) = 3$ за время $O(|V(G)|)$ вычисляет точное значение параметра $R(G)$. Наличие такого алгоритма позволяет считать, что упоминаемая в утверждении 2.2.11 формула является основой для вычисления точного значения параметра $\mu_{12}(G)$ за время $O(|V(G)|)$ для любого дерева G с $|V(G)| \geq 2$ (поскольку, очевидно, параметры $\gamma(G)$ и $\Gamma(G)$ алгоритмически легковычисляемы).

Для $\forall s \in N$ положим

$$\mathfrak{M}(s) \equiv \{F / \ F : E(P_{s+1}) \to \{1,2,3\}\}.$$

Для $\forall F_0 \in \mathfrak{M}(s)$, где $s \in N$, положим

$$g(F_0) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } s = 1 \\ \infty, & \text{если } s \geq 2 \text{ и } \{i / \ 1 \leq i \leq s-1, \\ & F_0(e_{i+1}) = F_0(e_i)\} \neq \emptyset \\ |\{i / \ 1 \leq i \leq s-1, \\ |F_0(e_{i+1}) - F_0(e_i)| = 1\}|, & \text{если } s \geq 2 \text{ и } \{i / \ 1 \leq i \leq s-1, \\ & F_0(e_{i+1}) = F_0(e_i)\} = \emptyset \end{cases}$$

Для $\forall s \in N$ и любых i, j, где $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2,3\}$, положим:

$$c_{s,i,j} \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } s = 1 \text{ и } i = j \\ \infty, & \text{если } s = 1 \text{ и } i \neq j \\ \min\{g(F) / \ F \in \mathfrak{M}(s), F(e_1) = i,\ F(e_s) = j\}, & \text{если } s \geq 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что для $\forall s \in N$ и любых i, j, где $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2,3\}$, $c_{s,i,j} = c_{s,j,i}$.

Нетрудно заметить также, что для $\forall s \in N$ $c_{s,1,1} = c_{s,3,3}$ и $c_{s,1,2} = c_{s,2,3}$.

Нетрудно убедиться, что для $\forall s \in N$ имеют место следующие равенства:

$$c_{s,1,1} = \begin{cases} 0, & \text{если } s = 2r+1, \text{ где } r \in Z_+ \\ \infty, & \text{если } s = 2 \\ 2, & \text{если } s = 2r, \text{ где } r \in N,\ r \geq 2, \end{cases}$$

$$c_{s,1,2}=\begin{cases}\infty, & \text{если } s=1\\ 1, & \text{если } s\in N,\ s\geq 2,\end{cases}$$

$$c_{s,1,3}=\begin{cases}\infty, & \text{если } s=1\\ 2, & \text{если } s=2r+1, \text{ где } r\in N\\ 0, & \text{если } s=2r, \text{ где } r\in N,\end{cases}$$

$$c_{s,2,2}=\begin{cases}0, & \text{если } s=1\\ \infty, & \text{если } s=2\\ 2, & \text{если } s\in N,\ s\geq 3.\end{cases}$$

В остающейся части §2.3 рассматриваются только деревья G с $\Delta(G)=3$, удовлетворяющие условию $\{x\in V(G)/\ d_G(x)=2\}\neq\emptyset$. Прежде чем указать алгоритм, позволяющий вычислять точное значение параметра $R(G)$ таких деревьев, договоримся считать, что при исследовании любого такого дерева G автоматически фиксируется некоторая (произвольная) его вершина x_0 с $d_G(x_0)=2$ и вводятся в рассмотрение следующие, однозначно определяемые выбором вершины x_0, числа и множества.

$$\nu_G(x_0)\equiv\max_{z\in V^{(1)}(G)}|intVP(x_0,z)\cap V^{(3)}(G)|;$$

$$B(x_0,G)\equiv V^{(1)}(G)\cup V^{(3)}(G)\cup\{x_0\};\qquad B(x_0,0)\equiv V^{(1)}(G);$$

для $\forall x\in B(x_0,G)\setminus V^{(1)}(G)$ определено подмножество $Post(x_0,x,G)$ вершин дерева G следующим образом:

$$Post(x_0,x,G)\equiv\begin{cases}\{z\in B(x_0,G)/\ x\in intVP(x_0,z)\}, & \text{если } x\neq x_0\\ B(x_0,G)\setminus\{x_0\}, & \text{если } x=x_0;\end{cases}$$

для $j=1,2,\ldots,1+\nu_G(x_0)$ определено подмножество $B(x_0,j)$ множества $V^{(3)}(G)$ следующим образом:

$$B(x_0,j)\equiv\left\{x\in B(x_0,G)\setminus\bigcup_{i=0}^{j-1}B(x_0,i)/Post(x_0,x,G)\subseteq\bigcup_{i=0}^{j-1}B(x_0,i)\right\}.$$

(При этом ясно, что для $\forall j_0$, где $1\leq j_0\leq 1+\nu_G(x_0)$, и для $\forall x\in V^{(3)}(G)\cup\{x_0\}$ из соотношения $x\in B(x_0,j_0)$ вытекает существование двух вершин $x_{\downarrow 1}$, $x_{\downarrow 2}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\{x_{\downarrow 1},x_{\downarrow 2}\}\subseteq Post(x_0,x,G)$,

2) $intVP(x,x_{\downarrow i})\cap V^{(3)}(G)=\emptyset$, где $i=1,2$.)

Алгоритм A (вычисления для произвольного дерева G с $|V(G)| \geq 2$ числа $A(G)$, равного точному значению параметра $R(G)$).

Шаг 0. Присвоение чисел $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ всем вершинам x из множества $B(x_0,0)$.

Для $\forall x \in B(x_0,0)$ и $\forall i, 1 \leq i \leq 3$, положить $a_i(x) \equiv 0$.

Шаг j $(1 \leq j \leq \nu_G(x_0))$. Присвоение чисел $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ всем вершинам x из множества $B(x_0, j)$. (Осуществление Шага j начинается тогда и только тогда, когда полностью завершены Шаги $0,1,\dots,j-1$.)

Последовательно для всех вершин x из $B(x_0, j)$ положить:

$$\begin{aligned} a_1(x) \quad &\equiv \quad \min\Big\{ \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 1}),2,k} + a_k(x_{\downarrow 1})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 2}),3,k} + a_k(x_{\downarrow 2})\}, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 1}),3,k} + a_k(x_{\downarrow 1})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 2}),2,k} + a_k(x_{\downarrow 2})\}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(x) \quad &\equiv \quad \min\Big\{ \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 1}),1,k} + a_k(x_{\downarrow 1})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 2}),3,k} + a_k(x_{\downarrow 2})\}, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 1}),3,k} + a_k(x_{\downarrow 1})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 2}),1,k} + a_k(x_{\downarrow 2})\}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(x) \quad &\equiv \quad \min\Big\{ \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 1}),1,k} + a_k(x_{\downarrow 1})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 2}),2,k} + a_k(x_{\downarrow 2})\}, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 1}),2,k} + a_k(x_{\downarrow 1})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x,x_{\downarrow 2}),1,k} + a_k(x_{\downarrow 2})\}\Big\}. \end{aligned}$$

Замечание 2.3.1 *Ясно, что в результате выполнения Шага $\nu_G(x_0)$ будут вычислены числа $a_1(x_{0_{\downarrow 1}})$, $a_2(x_{0_{\downarrow 1}})$, $a_3(x_{0_{\downarrow 1}})$, $a_1(x_{0_{\downarrow 2}})$, $a_2(x_{0_{\downarrow 2}})$, $a_3(x_{0_{\downarrow 2}})$.*

Шаг $1+\nu_G(x_0)$. Вычисление числа $A(G)$.

Положить:

$$\begin{aligned} A(G) \quad &\equiv \quad \min\Big\{ \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 1}}),1,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 2}}),2,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}})\} + 1, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 1}}),2,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 2}}),1,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}})\} + 1, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 1}}),1,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 2}}),3,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}})\}, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 1}}),3,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 2}}),1,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}})\}, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 1}}),2,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 2}}),3,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}})\} + 1, \\ &\quad \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 1}}),3,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}})\} + \min_{1\leq k\leq 3}\{c_{d(x_0,x_{0_{\downarrow 2}}),2,k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}})\} + 1\Big\}. \end{aligned}$$

Шаг $2+\nu_G(x_0)$. Завершение алгоритма. Стоп.

Замечание 2.3.2 *Корректность алгоритма A вытекает из определения чисел* $c_{s,i,j}$ $(s \in N, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\})$*, их свойств, из описания шагов алгоритма A и из принципа динамического программирования.*

Замечание 2.3.3 *Нетрудно убедиться, что указанные до описания Алгоритма A вычисления чисел и множеств, связанных с выбором вершины* x_0 *с* $d_G(x_0) = 2$ *дерева* G*, могут быть выполнены за время* $O(|V(G)|)$.

В §2.4 вычисляются точные значения параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22} для одного узкого класса деревьев, именуемых в работе плеядами, а также дается необходимое и достаточное условие равенства параметра μ_{21} числу вершин графа.

Для любых натуральных чисел n и i, удовлетворяющих неравенствам $n \geq 3, 2 \leq i \leq n-1$, и любой последовательности $A_{n-2} \equiv (a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ целых неотрицательных чисел определим множества $V[i, A_{n-2}]$ и $E[i, A_{n-2}]$ следующим образом:

$$V[i,A_{n-2}] \equiv \begin{cases} \{y_{i,1},...,y_{i,a_{i-1}}\} & \text{при } a_{i-1} > 0 \\ \varnothing & \text{при } a_{i-1} = 0, \end{cases}$$
$$E[i,A_{n-2}] \equiv \begin{cases} \{(x_i, y_{i,j})/1 \leq j \leq a_{i-1}\} & \text{при } a_{i-1} > 0 \\ \varnothing & \text{при } a_{i-1} = 0. \end{cases}$$

Для $\forall n \in N, n \geq 3$ и любой последовательности $A_{n-2} \equiv (a_1, a_2, ..., a_{n-2})$ целых неотрицательных чисел определим граф $P[A_{n-2}]$ следующим образом:

$$V(P[A_{n-2}]) \equiv \{x_1,...,x_n\} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n-1} V_n[i, A_{n-2}]\right),$$
$$E(P[A_{n-2}]) \equiv \{(x_i, x_{i+1})/1 \leq i \leq n-1\} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n-1} E[i, A_{n-2}]\right).$$

Граф G назовем плеядой, если либо $G \cong K_2$, либо существуют $n \in N, n \geq 3$ и последовательность A_{n-2} таких целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$, при которых $G \cong P[A_{n-2}]$.

Очевидно, любая плеяда является деревом, вследствие чего мы вправе не проводить дополнительных исследований по значениям параметров $\mu_{11}(G)$ и $\mu_{22}(G)$. С аналогичным обоснованием можно считать, что точное значение параметра $\mu_{12}(G)$ для плеяд, удовлетворяющих условию $\Delta(G) \neq 3$, в дополнительных исследованиях не нуждается.

Утверждение 2.4.1 *Если* G *– плеяда с* $\Delta(G) = 3$*, то* $\mu_{12}(G) = \gamma(G) + \Gamma(G)$.

Утверждение 2.4.3 *Для любой плеяды* G $\mu_{21}(G) = |V(G)|$.

Утверждение 2.4.4 *Для связного графа* G $\mu_{21}(G) = |V(G)|$ *тогда и только тогда, когда* G *– плеяда.*

В главе 3 приводится полное решение основной задачи для некоторых кубических графов, именно, для «лестниц Мебиуса» и графа Петерсена.

В §3.1 вычисляются точные значения параметров μ_{11}, μ_{12} и μ_{22} «лестниц Мебиуса» M_{2n} $(n \geq 2)$.

Утверждение 3.1.2 *Для* $\forall n \in N$, $n \geq 2$ $\mu_{12}(M_{2n}) = \mu_{22}(M_{2n}) = 2n$.

Утверждение 3.1.3 *Для* $\forall n \in N$, $n \geq 2$ $\mu_{11}(M_{2n}) = 0$.

В §3.2 формулируется и решается вспомогательная комбинаторная задача, при помощи которой вычисляется точное значение параметра μ_{21} «лестниц Мебиуса».

Последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ при $p \geq 1$ натуральных чисел назовем строго возрастающей, если имеет место одно из следующих двух условий: 1) $p = 1$; 2) $p \geq 2$ и $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.

Последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ при $p \geq 1$ натуральных чисел назовем строго убывающей, если имеет место одно из следующих двух условий: 1) $p = 1$; 2) $p \geq 2$ и $a_1 > a_2 > \cdots > a_p$.

Последовательность A натуральных чисел назовем строго монотонной, если она удовлетворяет по меньшей мере одному из следующих двух условий: 1) A является строго возрастающей; 2) A является строго убывающей.

Строго монотонную последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ назовем интервальной, если $|a_p - a_1| = p - 1$.

Определение 3.2.1 *Количество членов конечной последовательности A различных натуральных чисел обозначим через $card(A)$.*

Для $\forall n \in N$, $n \geq 3$ n-раскладом сорта α назовем последовательность $\mathfrak{M} = (Q_1, \ldots, Q_k)$ $(k \geq 1)$ интервальных последовательностей натуральных чисел, удовлетворяющую следующим условиям:

1) для $\forall i \in Int(1, k)$ имеют место условия
   (a) если i нечетно, то $1 \leq l(Q_i)$ и $L(Q_i) \leq n$,
   (b) если i четно, то $n + 2 \leq l(Q_i)$ и $L(Q_i) \leq 2n - 1$,
2) $l(Q_1) = 1$, $l(Q_2) \geq L(Q_1) + n$,
3) при $k \geq 3$ для $\forall i$, удовлетворяющего неравенству $3 \leq i \leq k$, верно неравенство $l(Q_i) \geq \max\{L(Q_{i-1}) + (-1)^i \cdot n, L(Q_{i-2}) + 2\}$.

Для $\forall n \in N$, $n \geq 3$ n-раскладом сорта β назовем последовательность $\mathfrak{M} = (Q_1, \ldots, Q_k)$ $(k \geq 1)$ интервальных последовательностей натуральных чисел, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $Q_1 = (1)$,
2) для $\forall i \in Int(2, k-1)$ имеют место условия
   (a) если i нечетно, то $1 \leq l(Q_i)$ и $L(Q_i) \leq n - 1$,
   (b) если i четно, то $n + 1 \leq l(Q_i)$ и $L(Q_i) \leq 2n - 1$,

3) при $k \geq 3$ для $\forall i$, удовлетворяющего неравенству $3 \leq i \leq k$, верно неравенство $l(Q_i) \geq \max\{L(Q_{i-1}) + (-1)^i \cdot n, L(Q_{i-2}) + 2\}$.

Множество всех n-раскладов ($n \geq 3$) сорта ε, где $\varepsilon \in \{\alpha, \beta\}$, обозначим через $B_\varepsilon(n)$.

Если $\mathfrak{M} = (Q_1, \ldots, Q_k) \in B_\alpha(n) \cup B_\beta(n)$, где $n \in N$, $n \geq 3$, то положим $\pi(\mathfrak{M}) \equiv \sum_{i=1}^{k} card(Q_i)$.

Определение 3.2.5 *n-расклад $\mathfrak{M}_0$ сорта ε, где $n \in N$, $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{\alpha, \beta\}$, назовем максимальным n-раскладом сорта ε, если*

$$\pi(\mathfrak{M}_0) = \max_{\mathfrak{M} \in B_\varepsilon(n)} \pi(\mathfrak{M}).$$

Определение 3.2.6 *Для $\forall n \in N$, $n \geq 3$ определим долготу $longitude(n)$ числа n равенством*

$$longitude(n) \equiv \max_{\mathfrak{M} \in B_\alpha(n) \cup B_\beta(n)} \pi(\mathfrak{M}).$$

Вспомогательная комбинаторная задача. Дано $\forall n \in N$, $n \geq 3$. Найти $longitude(n)$.

Теорема 3.2.3 *Для $\forall n \in N$, $n \geq 3$, верно равенство*

$$longitude(n) = 2n - \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3}{4} \right\rfloor - 3.$$

В §3.3 вычисляется точное значение параметра μ_{21} «лестниц Мебиуса» M_{2n} при $n \geq 2$.

Теорема 3.3.1 *Для $\forall n \in N$, $n \geq 3$*

$$\mu_{21}(M_{2n}) = 2n - \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3}{4} \right\rfloor - 3.$$

В §3.4 вычисляются точные значения параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} графа P Петерсена. Доказана

Теорема 3.4.1 *Для графа P верны равенства $\mu_{11}(P) = 0$, $\mu_{12}(P) = 2$, $\mu_{21}(P) = 6$, $\mu_{22}(P) = 8$.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- найдены точные значения параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} для простых циклов, простых циклов с одной хордой, для «лестниц Мебиуса» и графа Петерсена;
- предложен полиномиальный алгоритм вычисления точного значения параметра μ_{12} любого дерева;
- показано, что существуют графы G, для которых $\mu_{12} < \mu_{21}$, а также, что существуют графы G, для которых $\mu_{21} < \mu_{12}$;
- найдено необходимое и достаточное условие равенства значения параметра μ_{21} числу вершин графа;
- показана NP-полнота задачи о равенстве параметра μ_{12} числу вершин графа в случае регулярных графов.

ПЕРЕЧЕНЬ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Н.Н. Давтян, Р.Р. Камалян. О границах экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных t-цветных раскрасок «лестниц Мебиуса» при варьировании t. В *Годичная научная конференция РАУ, сб. науч. статей*, Ереван, с. 81–84, 2009.
2. Н.Н. Давтян. О наименьшем и наибольшем возможных числах вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок дерева. *Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники*, 32:107–111, 2009.
3. N.N. Davtyan, R.R. Kamalian. On properties of the number of vertices with an interval spectrum in proper edge colorings of some graphs. *the Herald of the RAU*, 2:33–42, 2009.
4. Н.Н. Давтян. Об одном свойстве параметра μ_{12} деревьев специального типа. *Вестник РАУ* 2:77–82, 2010.
5. Н.Н. Давтян, Р.Р. Камалян. Об алгоритме вычисления параметра μ_{12} произвольного дерева. *Вестник РАУ* 1:57–63, 2011.
6. N.N. Davtyan, R.R. Kamalian. On the number of vertices with an interval spectrum in edge labelings of regular graphs. *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences*, 3(235): 40–42, 2014.

7. N.N. Davtyan, A.M. Khachatryan, R.R. Kamalian. A Structure of the Subgraph Induced at a Labeling of a Graph by the Subset of Vertices with an Interval Spectrum. *Applied Mathematical Sciences*, 8(173):8635–8641, 2014.

8. N.N. Davtyan. On a game connected with edge colorings of graphs. *Scientific Proceedings of Gyumri State Pedagogical Institute*, 1:129–137, 2014.

9. N.N. Davtyan, R.R. Kamalian. Some relations between the μ-parameters of regular graphs. *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences*, 1(236):47–51, 2015.

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Ն.Ն. Դավթյան

ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՃԻՇՏ ԿՈՂԱՅԻՆ ՆԵՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՄԻՋԱԿԱՅՔԱՅԻՆ ՍՊԵԿՏՐՈՎ ԳԱԳԱԹՆԵՐԻ ԹՎԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ատենախոսությունում դիտարկվում են չկողմնորոշված G գրաֆներ առանց պատիկ կողերի և օղերի՝ գագաթների $V(G)$ և կողերի $E(G)$ բազմություններով: G գրաֆի՝ $1,2,\ldots,t$ գույներով իրականացվող բոլոր ճիշտ կողային ներկումների բազմությունը նշանակենք $\alpha(G,t)$ -ով, G -ի քրոմատիկ դասը նշանակենք $\chi'(G)$ -ով, և, դիցուք, $\alpha(G)\equiv\bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|}\alpha(G,t)$:

Հաջորդական ամբողջ թվերի կամայական ոչ դատարկ վերջավոր ենթաբազմությունն անվանում ենք միջակայք: Եթե G -ն գրաֆ է, $x\in V(G)$, $\varphi\in\alpha(G)$, ապա այն գույների բազմությունը, որոնք φ -ում օգտագործված են x գագաթին կից կողերի համար, անվանում ենք G -ի x գագաթի սպեկտր φ ներկման մեջ: G -ի այն գագաթների թիվը, որոնց սպեկտրը միջակայք է, նշանակում ենք $f_G(\varphi)$ -ով, և φ -ն անվանում ենք G -ի միջակայքային կողային ներկում, եթե $f_G(\varphi)=|V(G)|$: Միջակայքային կողային ներկում ունեցող գրաֆների դասը նշանակում ենք $\mathfrak{N}$ -ով:

Հայտնի է, որ գրաֆների առավել կարևոր դասերի (խորանարդ, երկկողմանի և այլն) համար գրաֆի $\mathfrak{N}$ դասին պատկանելիության խնդիրը NP -լրիվ է: Դրա հետ կապված կարևոր է դառնում $\alpha(G)$ բազմության վրա $f_G(\varphi)$ ֆունկցիայի հատկությունների, մասնավորապես, նրա էքստրեմալ հատկությունների ուսումնասիրումը:

G գրաֆի և t թվի համար, որտեղ $\chi'(G)\le t\le|E(G)|$, սահմանենք.

$$\mu_1(G,t)\equiv\min_{\varphi\in\alpha(G,t)}f_G(\varphi),\quad \mu_2(G,t)\equiv\max_{\varphi\in\alpha(G,t)}f_G(\varphi):$$

G գրաֆի համար սահմանենք.

$$\mu_{11}(G)\equiv\min_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|}\mu_1(G,t),\quad \mu_{12}(G)\equiv\max_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|}\mu_1(G,t),$$

$$\mu_{21}(G)\equiv\min_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|}\mu_2(G,t),\quad \mu_{22}(G)\equiv\max_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|}\mu_2(G,t):$$

$\mu_{11}(G)$, $\mu_{12}(G)$, $\mu_{21}(G)$, $\mu_{22}(G)$ պարամետրերը հանդիսանում են $\alpha(G,t)$ բազմության վրա միջակայքային սպեկտրով գագաթների թվի էքստրեմումների սահմաններ, երբ գույների t քանակը փոփոխվում է G գրաֆի քրոմատիկ դասի և կողերի քանակի միջև:

Նշենք, որ μ_{12} և μ_{21} պարամետրերն ունեն, մասնավորապես, նաև տեսական-խաղային իմաստ: Դիցուք G գրաֆի կողերը ներկվում են երկու անձերի՝ հակադիր շահերով և դերերի ոչ համաչափ բաշխումով, խաղում: Առաջին անձը որոշում է գույների թիվը, որոնցով պետք է ներկվեն G գրաֆի կողերը, իսկ երկրորդ անձը ներկում է G-ի կողերը, օգտագործելով առաջինի կողմից որոշված քանակով գույներ:

Եթե առաջինը ձգտում է մաքսիմիզացնել միջակայքային սպեկտրով գագաթների թիվը G-ի կողերի վերջնական ներկման մեջ, իսկ երկրորդը ձգտում է մինիմիզացնել այն, ապա խաղի վերջում G-ում կլինի միջակայքային սպեկտր ունեցող $\mu_{12}(G)$ գագաթ:

Եթե առաջինը ձգտում է մինիմիզացնել միջակայքային սպեկտրով գագաթների թիվը G-ի կողերի վերջնական ներկման մեջ, իսկ երկրորդը ձգտում է մաքսիմիզացնել այն, ապա խաղի վերջում G-ում կլինի միջակայքային սպեկտր ունեցող $\mu_{21}(G)$ գագաթ:

Ատենախոսությունում հետազոտված են որոշ պարզագույն արտաքին-հարթ և խորանարդ գրաֆների μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22} պարամետրերը:

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- գտնված են μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} և μ_{22} պարամետրերի ճշգրիտ արժեքները պարզ ցիկլերի, մեկ լարով պարզ ցիկլերի, «Մյոբիուսի սանդուղքների» և Պետերսենի գրաֆի համար,
- առաջարկված է բազմանդամային ալգորիթմ կամայական ծառի μ_{12} պարամետրի ճշգրիտ արժեքը գտնելու համար,
- ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն գրաֆներ, որոնց համար $\mu_{12} < \mu_{21}$, ինչպես նաև գոյություն ունեն գրաֆներ, որոնց համար $\mu_{21} < \mu_{12}$,
- գտնված է μ_{21} պարամետրի՝ գրաֆի գագաթների քանակին հավասար լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայման,
- ցույց է տրված μ_{12} պարամետրի՝ գրաֆի գագաթների քանակին հավասար լինելու խնդրի NP-լրիվությունը համասեռ գրաֆների դեպքում:

ABSTRACT

N.N. Davtyan

ON BOUNDARIES OF EXTREMA OF THE NUMBER OF VERTICES WITH AN INTERVAL SPECTRUM ON THE SETS OF PROPER EDGE COLORINGS OF SOME CLASSES OF GRAPHS

In the dissertation finite simple undirected graphs G without multiple edges and loops are considered, with the set $V(G)$ of vertices and the set $E(G)$ of edges. The set of all proper edge colorings of G with colors $1,2,\dots,t$ is denoted by $\alpha(G,t)$, the chromatic index of G is denoted by $\chi'(G)$, and let $\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G,t)$.

An arbitrary nonempty finite subset of consecutive integers is called an interval. If G is a graph, $x \in V(G)$, $\varphi \in \alpha(G)$, then the set of colors used by φ for edges incident to x is called a spectrum of the vertex x of the graph G at φ; the number of vertices of G with an interval spectrum is denoted by $f_G(\varphi)$. $\varphi \in \alpha(G)$ is called an interval edge coloring of the graph G, if $f_G(\varphi) = |V(G)|$. The set of all graphs having an interval edge coloring is denoted by $\mathfrak{N}$.

It's known that for graphs G of the most important classes (cubic, bipartite and so on), having both theoretical and practical significanse, the problem of deciding whether G belongs to $\mathfrak{N}$ or not is NP-complete. Due to it the problem of investigations of properties, particularly extremal properties, of the function $f_G(\varphi)$ on the set $\alpha(G)$ becomes important.

For a graph G and $t \in N$, $\chi'(G) \le t \le |E(G)|$, set:

$$\mu_1(G,t) \equiv \min_{\varphi\in\alpha(G,t)} f_G(\varphi), \quad \mu_2(G,t) \equiv \max_{\varphi\in\alpha(G,t)} f_G(\varphi).$$

For a graph G, set:

$$\mu_{11}(G) \equiv \min_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_1(G,t), \quad \mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_1(G,t),$$

$$\mu_{21}(G) \equiv \min_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_2(G,t), \quad \mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_2(G,t).$$

The parameters $\mu_{11}(G)$, $\mu_{12}(G)$, $\mu_{21}(G)$ and $\mu_{22}(G)$ are boundaries of extrema of the number of vertices with an interval spectrum on the set $\alpha(G,t)$ under variation of the number t of colors between the chromatic index and the number of edges of G.

Let us note that the exact values of the parameters μ_{12} and μ_{21} have certain game interpretations. Suppose that all edges of a graph G are colored in the game of two players with antagonistic interests and asymmetric distribution of roles. The first player determines the number t of colors in the future proper edge coloring φ of the graph G, satisfying the condition $\chi'(G) \le t \le |E(G)|$, the second colors edges of G with t colors.

When the first aspires to maximize, the second aspires to minimize the value of the function $f_G(\varphi)$, and both players choose their best strategies, then at the finish of the game exactly $\mu_{12}(G)$ vertices of G will receive an interval spectrum.

When the first aspires to minimize, the second aspires to maximize the value of the function $f_G(\varphi)$, and both players choose their best strategies, then at the finish of the game exactly $\mu_{21}(G)$ vertices of G will receive an interval spectrum.

In the dissertation the exact values of the parameters μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} and μ_{22} are found for some simple outerplanar and cubic graphs.

The following main results are obtained:

- the exact values of the parameters μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} and μ_{22} are found for simple cycles, simple cycles with a chord, for «Mobius ladders» and for the Petersen graph;
- a polynomial algorithm is proposed for calculation of the exact value of the parameter μ_{12} for an arbitrary tree;
- it is shown that there are graphs for which $\mu_{12} < \mu_{21}$, and there are also graphs for which $\mu_{21} < \mu_{12}$;
- a necessary and sufficient condition is found for a graph G, which satisfies the equality $\mu_{21}(G) = |V(G)|$;
- for regular graphs, it is shown that the problem of deciding whether μ_{12} is equal to the number of vertices of the graph is NP-complete.