ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Քամալյան Ռաֆայել Ռուբենի

ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՆԵՐԿՈՒՄՆԵՐ ԼՈԿԱԼ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2017

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Камалян Рафаел Рубенович

РАСКРАСКИ ГРАФОВ С ЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности
01.01.09 – “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван – 2017

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Վ. Պյատկին
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Ա. Չուբարյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Է.Մ. Պողոսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Տարաս Շևչենկոյի անվան Կիևի ազգային համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2017թ. հունիսի 21-ին, ժ. 14^{30}-ին ԵՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲՈՀ-ի 044 “Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա” մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. մայիսի 17-ին:
Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր՝ Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Институте информатики и проблем автоматизации НАН РА

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук А.В. Пяткин
доктор физ.-мат. наук А.А. Чубарян
доктор физ.-мат. наук Э.М. Погосян

Ведущая организация: Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Защита состоится 21-го июня 2017 г. в 14^{30} часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета 044 ВАК РА “Математическая кибернетика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.
Автореферат разослан 17-го мая 2017 г.
Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук В.Ж. Думанян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования задач о хроматическом числе и хроматическом классе графа[1], сформулированных в связи с изучением вопросов прикладного характера, пройдя длинный исторический путь от определений раскрасок до оценок значений этих параметров, значительно обогатили теорию графов ценными теоремами, идеями, методами доказательств, новыми гипотезами и задачами, конструктивными алгоритмами раскрасок. После введения классов P, NP и понятия NP-полной задачи были получены результаты, выявившие сложность задач о хроматическом числе и хроматическом классе даже для сравнительно узких классов графов и указавшие на принципиальные трудности в развитии классических подходов. Параллельно, в связи с растущей потребностью построения адекватных математических моделей все более усложняющихся задач различных сфер практики – с одной стороны, и, в связи с обнаружившимися сложностями преодоления затруднений приближенными и вероятностными алгоритмами, – с другой, заметно возрастала необходимость исследований неклассических задач раскрасок графов. Видное место в этом направлении принадлежит таким раскраскам (реберным, вершинным) графов, в которых на множество цветов, используемых в окрестности (реберной, вершинной) вершины, налагается некоторое локальное условие λ.

Такие условия, как правило, отражают специфические особенности моделируемых прикладных задач и бывают связаны с природой ресурсов, технологическими требованиями, особыми условиями труда, необходимостью приоритетного выполнения некоторых заказов, желательностью равномерного распределения противоборствующих влияний в системах, подверженных опасности возникновения конфликтов и т.д.. При этом количественные ограничения чаще всего объясняются соответствующими ограничениями в реальных процессах (необходимость экономии природного ресурса, ограниченное число исполнителей, малая производительность труда, завершение выполнения заказа к установленному сроку и т.д.). Качественные ограничения происходят из особенностей технологических процессов, условий труда и отдыха (непрерывность производственных процессов, учет индивидуальных пожеланий исполнителей и т.д.). Отметим, что многочисленные ограничения в реальных задачах заметно осложняют их исследование традиционными методами, какими являются, например, методы линейного программирования, потоки в сетях и т.д.

Настоящая работа представляет вклад автора в изучение раскрасок графов при различных локальных условиях на окрестности их вершин, отражая наиболее ценные результаты, полученные им, начиная с 1982 г. – как лично, так и в соавторстве с другими исследователями.

В работе, по объективным причинам в неравной степени, рассмотрены задачи о существовании, построении, свойствах, оценивании числовых параметров раскрасок графов при пяти различных локальных условиях λ. Большая часть исследований посвящена реберным раскраскам графов (при трех разных

[1] Харари Ф., Теория графов, М.: Мир, 1973, 300 с.

λ). Вершинным раскраскам посвящена последняя глава работы (при двух разных λ).

Вкратце перечислим исследуемые в работе условия λ в их связях с прикладными задачами.

Одним из важных аспектов в задачах теории расписаний[2] является составление расписаний без прерываний. Обычно расписанием без прерываний называется расписание, при котором каждое требование выполняется одним прибором непрерывно во времени. Существует, однако, ряд актуальных малоизученных задач теории расписаний (как, например, составление школьных расписаний без “окон”, где каждая учебная группа и (или) каждый преподаватель проводит занятия непрерывно во времени), которые выходят за рамки такого понимания расписаний без прерываний. Изучение задач раскрасок графов, соответствующих задачам существования и построения расписаний без “окон”, может быть полезным как для теории расписаний и ее приложений, так и для выявления новых хроматических свойств графов. Для графового моделирования таких задач в работе исследуются задачи о существовании и построении правильных реберных раскрасок графов в цвета $1,...,t$, при которых ребра, инцидентные вершине графа, окрашены в последовательные цвета (условие λ_1), и для каждого i, $1 \le i \le t$, существует ребро цвета i. Такие раскраски мы называем интервальными t-раскрасками графов. Некоторое внимание мы уделяем и частному случаю интервальных раскрасок, при котором ребра, инцидентные вершине графа, окрашены в последовательные, обязательно начинающиеся с первого, цвета (условие λ_2). Такие раскраски мы называем непрерывными. В приложениях они соответствуют таким расписаниям, при которых участники учебного или производственного процесса работают подряд с “утра”. Немалый интерес – и с теоретической, и с практической точек зрения – представляют также задачи о существовании и построении правильных реберных раскрасок графов в расположенные на окружности цвета $1,...,t$, при которых ребра, инцидентные вершине графа, окрашены в циклически-последовательные цвета (условие λ_3), и для каждого цвета i, $1 \le i \le t$, существует ребро цвета i. Такие раскраски мы называем циклически-непрерывными. Они соответствуют таким практическим задачам, в которых требуется организация процесса без “окон” при “круглосуточном” режиме работы.

Другой актуальной прикладной задачей является задача повышения безопасности моделируемых систем самой разной природы, субъекты которых подвергаются воздействию двух противоборствующих влияний. Для таких систем один из важнейших факторов безопасности заключается в равномерном распределении этих влияний в сферах жизненных интересов субъектов системы, поскольку именно при равномерном распределении достигается наилучший ба-

---

[2] Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М., Теория расписаний. Одностадийные системы, М.: Наука, 1984, 384 с.
J. Blazewicz, K. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt, J. Weglarz, Scheduling computer and manufacturing processes. 2nd ed., Berlin, Springer, 2001, 485 pp.

ланс влияний, и уменьшается вероятность возникновения конфликтов. Заметим, что математическое моделирование задач указанного типа имеет смысл вести как в предположении о том, что субъекты моделируемой системы не обладают способностью самозащиты, так и в предположении, что такую способность субъекты системы имеют.

С целью изучения таких задач исследованы вопросы существования вершинных раскрасок графов в два цвета, при которых в вершинной окрестности любой вершины количества вершин разных цветов отличаются не более чем на 1. При этом, в соответствии с упомянутыми целями моделирования, рассматриваются две версии определения “окрестности” вершины. Наиболее распространенная, стандартная, при которой сама вершина не считается принадлежащей своей окрестности, может применяться для моделирования систем, субъекты которых не обладают способностью самозащиты. Другая, при которой сама вершина считается принадлежащей своей окрестности, может применяться для моделирования систем, субъекты которых наделены способностью самозащиты. В главе 5 приведены результаты, показывающие NP-полноту задач о существовании вершинных раскрасок с условиями λ_4 (для стандартной версии “окрестности”) и λ_5 (для расширенной версии “окрестности”) в классе двудольных графов.

Для условия λ ($\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$) и $t \in \mathbb{N}$ через $\mathfrak{R}_{\lambda,t}$ обозначаем множество графов, для которых существует правильная реберная раскраска в цвета $1,\ldots,t$ с соблюдением λ для всех вершин графа. Пусть $\mathfrak{R}_\lambda \equiv \bigcup_{t\geq 1} \mathfrak{R}_{\lambda,t}$. Для графа $G \in \mathfrak{R}_\lambda$ через $w_\lambda(G)$ и $W_\lambda(G)$ обозначаем, соответственно, наименьшее и наибольшее $t \in \mathbb{N}$, при котором $G \in \mathfrak{R}_{\lambda,t}$, и пусть $\Theta_\lambda(G) \equiv \{t \in \mathbb{N} / G \in \mathfrak{R}_{\lambda,t}\}$. С целью некоторого облегчения системы обозначений договоримся, что указание на условие λ в индексах будем опускать, если оно ясно из контекста.

Цель работы. Основная цель диссертации состоит в исследовании для графов различных классов задач о существовании, построении, структуре и оценивании числовых параметров их раскрасок при различных локальных условиях λ, налагаемых на окрестности (реберные, вершинные) их вершин. Основные изучаемые задачи следующие:

1. Даны граф G и условие λ. Выяснить, G принадлежит $\mathfrak{R}_\lambda$ или нет;
2. Дан граф $G \in \mathfrak{R}_\lambda$. Найти множество $\Theta_\lambda(G)$.

Значительное внимание в работе уделяется также таким раскраскам графов, при которых соблюдение локального условия λ считается обязательным на некотором подмножестве R множества вершин графа. (При этом, отсутствие указания на подмножество вершин графа в индексах обозначений означает, что соблюдение λ требуется на всем множестве его вершин.)

Объект исследования. Объектом исследования являются графы различных классов, изучаемые для выяснения вопросов о существовании, построении,

структуре и оценивании числовых параметров их раскрасок при различных локальных условиях на окрестности вершин.

Методы исследования. Исследование ведется с помощью методов теории графов и комбинаторной оптимизации.

Научная новизна. Работа отражает значительную часть исследований автора по интервальным реберным раскраскам графов, определенных им осенью 1981 г., и включает ряд новейших результатов, касающихся раскрасок, интервальных на некотором собственном подмножестве множества вершин графа. Первые исследования по интервальным раскраскам графов были проведены автором в его студенческие годы на факультете прикладной математики ЕГУ под руководством А.С. Асратяна. К настоящему времени тематика приобрела широкую популярность, став предметом внимания многих специалистов теории графов.

Практическая значимость полученных результатов. Методы диссертации неоднократно были использованы исследователями для установления новых утверждений. Результаты, алгоритмы и идеи работы могут применяться для построения и исследования математических моделей задач различных сфер практики.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах ВЦ АН Арм. ССР, ИПИА НАН РА, ЕГУ, РАУ, ГГУ, ИМ СО АН СССР, БГУ, на многочисленных конференциях в Ереване, Тбилиси, Горьком, Новосибирске, Минске. Тематика работы продолжается исследованиями, ведущимися в Армении, России, Польше, Венгрии, США, Канаде, Швейцарии, Германии, Дании, Швеции, Китае, Тайване.

Некоторые из результатов работы включены в книги[3] (см. также[4]).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 21 научных статей, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 164 страницах и состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы (214 наименований), содержит 17 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, определены цель и задачи работы, указаны объект и методы исследования, обозначена научная новизна полученных результатов и их практическая значимость, приведены сведения об апробации полученных результатов, о публикациях, структуре и объеме работы.

В первой главе приводятся основные определения и обозначения работы (§1); дано необходимое условие существования интервальной раскраски в произвольном мультиграфе (равенство хроматического класса мультиграфа максимальной из степеней его вершин), которое в случае регулярного мульти-

---

[3] Jensen T.R., Toft B., Graph Coloring Problems, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.

[4] Kubale M., Graph Colorings, Amer. Math. Soc., 2004, 208 pp.

графа является одновременно и достаточным условием (§2); показано, что задача о существовании интервальной раскраски является NP-полной для регулярных графов (§2); указан класс планарных двудольных графов, не имеющих интервальной раскраски (§2); приведены неравенства, дающие в случае интервально окрашиваемых произвольных графов и графов без треугольников оценки сверху через число вершин графа для возможного числа цветов в интервальной раскраске (§3); показано, что существуют интервально окрашиваемые графы, у которых число цветов в интервальной раскраске может со сколь угодно большой разницей превзойти число вершин графа; дана оценка снизу для наибольшего возможного числа цветов в интервальной раскраске полного графа с четным числом вершин (§3); приведены неравенства, дающие в случае интервально окрашиваемых произвольных графов и двудольных графов оценки сверху через максимальную из степеней вершин и диаметр графа для возможного числа цветов в интервальной раскраске, а также показано, что эти оценки являются трудноулучшаемыми (§3); для регулярных графов некоторых классов (графы Харари, обобщенные циклы, полные регулярные k-дольные графы) исследованы вопросы интервальной окрашиваемости и оценивания возможного числа цветов в интервальных раскрасках в случае их существования (§4); для двудольных графов некоторых классов (полные двудольные графы, деревья и двудольные графы, выпуклые относительно данных нумераций вершин своих долей) исследованы вопросы интервальной окрашиваемости и оценивания возможного числа цветов в интервальных раскрасках (§5).

В §1 главы 1 приведены необходимые определения и обозначения.

Для мультиграфа G через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаем, соответственно, множество его вершин и ребер. Степень вершины x в G обозначаем через $d_G(x)$, максимальную из степеней вершин – через $\Delta(G)$.

Диаметр графа G обозначаем через $diam(G)$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ через C_n обозначаем граф, изоморфный простому циклу с n вершинами.

Для мультиграфа G и его вершины x через $I_{G,v}(x)$ обозначаем множество вершин G, смежных вершине x, а через $I_{G,e}(x)$ – множество ребер G, инцидентных вершине x.

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$, множество целых неотрицательных чисел – через $\mathbb{Z}_+$. Для действительного числа α через $\lfloor \alpha \rfloor$ $(\lceil \alpha \rceil)$ обозначаем наибольшее (наименьшее) целое число, которое не больше (не меньше) α. Для любых натуральных чисел m и n через $\sigma(m,n)$ обозначаем наибольший общий делитель чисел m и n. Для произвольного конечного множества A через $|A|$ обозначаем его мощность. Если D – непустое конечное подмножество $\mathbb{Z}_+$, то через $l(D)$ и $L(D)$ будем обозначать наименьший и наибольший элемент D, соответственно. Непустое конечное

подмножество D множества $\mathbb{Z}_+$ назовем интервалом, если из $l(D) \le t \le L(D)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ следует $t \in D$. Интервал D назовем h-интервалом, если $|D| = h$. Интервал D назовем (q,h)-интервалом и обозначим через $Int(q,h)$, если $l(D) = q$, $|D| = h$. Если D_1 и D_2 интервалы, а $p \in \mathbb{Z}_+$, то запись $D_1 \oplus p = D_2$ означает, что $l(D_1) + p = l(D_2)$.

Функция $\varphi : E(G) \to Int(1,t)$ называется правильной реберной t-раскраской графа G, если: 1) для любых смежных ребер $e_1 \in E(G)$ и $e_2 \in E(G)$ $\varphi(e_1) \ne \varphi(e_2)$, 2) для $\forall i \in Int(1,t)$ $\exists e \in E(G)$, такое, что $\varphi(e) = i$.

Для графа G с $E(G) \ne \varnothing$ его хроматический класс $\chi'(G)$ определяется как наименьшее натуральное t, при котором существует правильная реберная t-раскраска графа G.

Если G – граф, x – его произвольная вершина, а φ – его любая правильная реберная t-раскраска, где $\chi'(G) \le t \le |E(G)|$, то положим $S_G(x,\varphi) \equiv$ $\equiv \{\varphi(e) / e \in E(G),\ e \text{ инцидентно } x\}$.

Правильная реберная t-раскраска φ графа G называется интервальной реберной t-раскраской G, если для $\forall x \in V(G)$ $S_G(x,\varphi)$ является $d_G(x)$-интервалом.

Правильная реберная t-раскраска φ графа G называется непрерывной реберной t-раскраской G [5], если для $\forall x \in V(G)$ $S_G(x,\varphi)$ является $(1, d_G(x))$-интервалом. Очевидно, что непрерывная реберная t-раскраска графа G может существовать лишь при $t = \Delta(G)$.

Функция $\varphi : V(G) \to Int(1,t)$ называется правильной вершинной t-раскраской графа G, если: 1) для любых смежных вершин $x \in V(G)$ и $y \in V(G)$ $\varphi(x) \ne \varphi(y)$, 2) для $\forall i \in Int(1,t)$ $\exists x \in V(G)$, такая, что $\varphi(x) = i$.

Для графа G с $V(G) \ne \varnothing$ его хроматическое число $\chi(G)$ определяется как наименьшее натуральное t, при котором существует правильная вершинная t-раскраска графа G.

2-разбиением графа G называется функция $f : V(G) \to \{0,1\}$.

В §2 главы 1 установлено необходимое условие существования интервальной раскраски в произвольном мультиграфе и отмечены некоторые свойства интервальных раскрасок регулярных мультиграфов.

Теорема 1.2.1. Если $G \in \mathfrak{R}$, то $\chi'(G) = \Delta(G)$.

---

[5] Асратян А.С., Исследование одной математической модели теории расписаний, кан. дисс., МГУ, 1980, 118 с.

Следствие 1.2.1. Если G r-регулярный $(r>0)$ граф с нечетным числом вершин, то $G \notin \mathfrak{R}$.

Утверждение 1.2.1. Пусть G регулярный мультиграф.

1. $G \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $\chi'(G)=\Delta(G)$.
2. Если $G \in \mathfrak{R}$ и $\Delta(G) \le t \le W(G)$, то $G \in \mathfrak{R}_t$.

Следствие 1.2.3. Если G регулярный граф, и $G \in \mathfrak{R}$, то $w(G)=\Delta(G)$.

Известно, что для регулярного графа G проблема определения: $\chi'(G)=\Delta(G)$ или $\chi'(G)=\Delta(G)+1$, является NP-полной. Отсюда и из утверждения 1.2.1 следует, что для регулярного графа G проблема определения: $G \in \mathfrak{R}$ или $G \notin \mathfrak{R}$, также является NP-полной.

Утверждение 1.2.11. Для $\forall n \ge 6$ существует планарный двудольный граф G с $|V(G)|=3n+5$, такой, что $G \notin \mathfrak{R}$.

В §3 главы 1 установлены некоторые неравенства о параметрах интервально окрашиваемых графов.

Теорема 1.3.1. Пусть G – связный граф с $|E(G)| \ge 1$. Если $G \in \mathfrak{R}$, то $W(G) \le 2|V(G)|-3$.

Лемма 1.3.2. Пусть G – связный регулярный граф с $\chi'(G)=\Delta(G)$, $3 \le |V(G)| \le 2^{\Delta(G)}+1$. Тогда G имеет интервальную на $V(G)$ $\left(\Delta(G)+\left\lfloor \log_2\left(|V(G)|-1\right)\right\rfloor\right)$-раскраску.

Теорема 1.3.3. Для любого $p>0$ существует граф G такой, что $G \in \mathfrak{R}$ и $W(G) \ge |V(G)|+p$.

Утверждение 1.3.1. Для любого $p>0$ существует граф G такой, что $G \in \mathfrak{R}$ и $W(G)-w(G) \ge p$.

Теорема 1.3.6. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $W\left(K_{2n}\right) \ge 3n-2$.

Следствие 1.3.1. Для любого $n \in \mathbb{N}$, если $2n-1 \le t \le 3n-2$, то $K_{2n} \in \mathfrak{R}_t$.

Теорема 1.3.7. Пусть G – связный граф без треугольников. Если $G \in \mathfrak{R}$, то $W(G) \le |V(G)|-1$.

Следствие 1.3.2. Если G – связный двудольный граф, и $G \in \mathfrak{R}$, то $W(G) \le |V(G)|-1$.

Теорема 1.3.10. Если G связный граф и $G \in \mathfrak{R}$, то $W(G) \le \left(diam(G)+1\right)\cdot$ $\cdot\left(\Delta(G)-1\right)+1$. Если G связный двудольный граф и $G \in \mathfrak{R}$, то $W(G) \le diam(G)\cdot$ $\cdot\left(\Delta(G)-1\right)+1$.

Нижеследующие две теоремы показывают, что неравенства, установленные в теореме 1.3.10, не могут быть существенно улучшены.

Теорема 1.3.11. Для любых натуральных чисел d и q существует связный граф G с $diam(G)=d$,

$$\Delta(G)=\begin{cases}2^q-1, & \text{если } d=1\\ 2^q, & \text{если } d=2\\ 2^q+1, & \text{если } d\geq 3,\end{cases}$$

такой, что $G\in\mathfrak{R}$ и

$$W(G)\geq\begin{cases}(d+1)(\Delta(G)-1)-q+2, & \text{если } d=1\\ (d+1)(\Delta(G)-1)-q+1, & \text{если } d=2\\ (d+1)(\Delta(G)-1)-q-2, & \text{если } d\geq 3.\end{cases}$$

Теорема 1.3.12. Для любых натуральных чисел d и q, удовлетворяющих неравенствам $d\geq 2$, $q\geq 2$, существует связный двудольный граф G с $diam(G)=d$, $\Delta(G)=q$, такой, что $G\in\mathfrak{R}$ и $W(G)=d\cdot(q-1)+1$.

В §4 главы 1 рассмотрены задачи о существовании, построении и оценках параметров интервально раскрашиваемых регулярных графов некоторых классов.

Сперва уделено внимание графам $H_{2n-2,2n}$ ($n\geq 2$), введеным Ф. Харари и получающимся из полного графа K_{2n} удалением совершенного паросочетания. Изучение задач такой направленности может рассматриваться также как исследование устойчивости свойства интервальной раскрашиваемости графа по отношению к тем или иным операциям на графах.

Теорема 1.4.1. При $n\geq 2$ $H_{2n-2,2n}\in\mathfrak{R}_{3n-3}$.

Следствие 1.4.1. При $n\geq 2$ $w(H_{2n-2,2n})=2n-2$.

Следствие 1.4.2. При $n\geq 2$ $W(H_{2n-2,2n})\geq 3n-3$.

Следствие 1.4.3. При $n\geq 2$, если $2n-2\leq t\leq 3n-3$, то $H_{2n-2,2n}\in\mathfrak{R}_t$.

Теорема 1.4.2. Для любого $m\in\mathbb{N}$ $W(H_{4m-2,4m})\geq W(K_{2m})+4m-2$.

Следствие 1.4.4. Если n – четное число $(n\geq 2)$, то $W(H_{2n-2,2n})\geq 3{,}5n-4$.

Следствие 1.4.5. Если n – четное число $(n\geq 2)$ и $2n-2\leq t\leq 3{,}5n-4$, то $H_{2n-2,2n}\in\mathfrak{R}_t$.

Далее поставленные в параграфе задачи изучаются для графов из класса $\mathfrak{R}(n,k)$ (известных в теории графов как “обобщенные циклы”). (Отметим, что $G\in\mathfrak{R}(n,k)$ $(n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 3)$ тогда и только тогда, когда множества вершин

и ребер графа G описываются соотношениями $V(G)=\left\{x_j^{(i)} \middle| 1\le i\le k,\ 1\le j\le n\right\}$,

$E(G)=\left\{\left(x_p^{(i)},x_q^{(i+1)}\right) \middle| 1\le i\le k-1,\ 1\le p\le n,\ 1\le q\le n\right\}\cup\left\{\left(x_p^{(k)},x_q^{(1)}\right) \middle| 1\le p\le n, 1\le q\le n\right\}$.)

Следствие 1.4.6. Пусть $G\in\mathfrak{R}(n,k)$. Тогда: 1) $G\in\mathfrak{R}$, если $n\cdot k$ – четное число, $G\notin\mathfrak{R}$, если $n\cdot k$ – нечетное число.

Следствие 1.4.7. Если $G\in\mathfrak{R}(n,k)$ и $n\cdot k$ – четное число, то $w(G)=2n.$

Теорема 1.4.3. Если $G\in\mathfrak{R}(n,k)$ и k – четное число, то

$$W(G)\ge 2n+\frac{n\cdot k}{2}-1.$$

Следствие 1.4.8. Если $G\in\mathfrak{R}(n,k)$, k – четное число и $2n\le t\le 2n+\dfrac{n\cdot k}{2}-1,$ то $G\in\mathfrak{R}_t$.

Завершается параграф исследованием поставленных задач для полных регулярных k -дольных графов с n вершинами в каждой доле (класс этих графов в работе обозначается через $\mathfrak{M}(n,k)$). (Отметим, что $G\in\mathfrak{M}(n,k)$ $(n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N},\ k\ge 2)$ тогда и только тогда, когда множества вершин и ребер графа G описываются соотношениями $V(G)=\left\{x_j^{(i)} \middle| 1\le i\le k,\ 1\le j\le n\right\}$,

$E(G)=\left\{\left(x_p^{(i)},x_q^{(j)}\right) \middle| 1\le i<j\le k,\ 1\le p\le n,\ 1\le q\le n\right\}$.)

Следствие 1.4.9. Пусть $G\in\mathfrak{M}(n,k)$. Тогда: 1) $G\in\mathfrak{R}$, если $n\cdot k$ – четное число, 2) $G\notin\mathfrak{R}$, если $n\cdot k$ – нечетное число.

Следствие 1.4.10. Если $G\in\mathfrak{M}(n,k)$ и $n\cdot k$ – четное число, то $w(G)=(k-1)\cdot n.$

Теорема 1.4.4. Если $G\in\mathfrak{M}(n,k)$ и k – четное число, то

$$W(G)\ge\left(\frac{3}{2}k-1\right)\cdot n-1.$$

Следствие 1.4.11. Если $G\in\mathfrak{M}(n,k)$, k – четное число и $(k-1)\cdot n\le t\le$ $\le\left(\dfrac{3}{2}k-1\right)\cdot n-1,$ то $G\in\mathfrak{R}_t$.

Теорема 1.4.5. Пусть $G\in\mathfrak{M}(n,k)$ и $k=r\cdot 2^s$, где r – нечетное число, а $s\in\mathbb{N}$. Тогда $W(G)\ge(2k-r-s)\cdot n-1.$

Следствие 1.4.12. Если $G\in\mathfrak{M}(n,k)$, $k=r\cdot 2^s$, где r – нечетное число, а $s\in\mathbb{N}$ и $(k-1)\cdot n\le t\le(2k-r-s)\cdot n-1,$ то $G\in\mathfrak{R}_t$.

В §5 главы 1 исследованы задачи о существовании, построении и оценках параметров интервальных раскрасок двудольных графов некоторых классов.

Начинается параграф с вспомогательного исследования свойств специальных булевых матриц.

Пусть $H(\mu,\nu)$ – $(0,1)$-матрица с μ строками, ν столбцами, с элементами h_{ij}, $1 \le i \le \mu$, $1 \le j \le \nu$. i-ую строку матрицы $H(\mu,\nu)$, $1 \le i \le \mu$, назовем собранной, если из $h_{ip} = h_{iq} = 1$, $p \le t \le q$ следует $h_{it} = 1$, и верно неравенство $\sum_{j=1}^{\nu} h_{ij} \ge 1$. Аналогично, j-ый столбец матрицы $H(\mu,\nu)$, $1 \le j \le \nu$, назовем собранным, если из $h_{pj} = h_{qj} = 1$, $p \le t \le q$ следует $h_{tj} = 1$, и верно неравенство $\sum_{i=1}^{\mu} h_{ij} \ge 1$. Для i-ой строки матрицы $H(\mu,\nu)$, все строки и столбцы которой собранные, определим число $\varepsilon(i, H(\mu,\nu)) = \min_{h_{ij}=1} j$, $i = 1,\ldots,\mu$. Для j-ого столбца матрицы $H(\mu,\nu)$, все строки и столбцы которой собранные, определим число

$$\zeta(j, H(\mu,\nu)) = \left|\left\{ i / \varepsilon(i, H(\mu,\nu)) = j,\ 1 \le i \le \mu \right\}\right|,\ j = 1,\ldots,\nu.$$

$H(\mu,\nu)$ назовем r-регулярной ($r \ge 1$) матрицей, если $\sum_{j=1}^{\nu} h_{ij} = r$, $i = 1,\ldots,\mu$. $H(\mu,\nu)$ назовем r-сжатой ($r \in \mathbb{Z}_+$) матрицей, если $\sum_{i=1}^{\mu} h_{ij} \le r$, $j = 1,\ldots,\nu$. $H(\mu,\nu)$ назовем собранной матрицей, если все ее строки и столбцы собранные, $h_{11} = h_{\mu\nu} = 1$ и $\varepsilon(1, H(\mu,\nu)) \le \cdots \le \varepsilon(\mu, H(\mu,\nu))$. $(0,1)$-матрицы $A(\alpha,\gamma)$ и $B(\beta,\gamma)$ с элементами a_{ij}, $1 \le i \le \alpha$, $1 \le j \le \gamma$ и b_{ij}, $1 \le i \le \beta$, $1 \le j \le \gamma$, соответственно, назовем равноценными, если $\sum_{i=1}^{\alpha} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\beta} b_{ij}$, $j = 1,\ldots,\gamma$. r'-регулярную ($r' \ge 1$) матрицу $H'(\mu',\nu')$ и r''-регулярную ($r'' \ge 1$) матрицу $H''(\mu'',\nu'')$ назовем взаимносогласованными, если $r' = \mu''$ и $r'' = \mu'$.

Лемма 1.5.1. Если собранная n-регулярная ($n \ge 1$) матрица $P(m,w)$ с элементами p_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le w$, является n-сжатой, то $w \ge \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil n$.

Лемма 1.5.2. Если собранная n-регулярная ($n \ge 1$) матрица $P(m,w)$ с элементами p_{ij}, $1 \le i \le m, 1 \le j \le w$ равноценна собранной m-регулярной ($m \ge 1$) матрице $Q(n,w)$ с элементами q_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le w$, то $w \ge m + n - \sigma(m,n)$.

С помощью леммы 1.5.2 основные задачи параграфа решаются для полных двудольных графов.

Теорема 1.5.1. Для любых натуральных m и n : 1) $K_{m,n} \in \mathfrak{R}$, 2) $w\left(K_{m,n}\right) = m+n-\sigma\left(m,n\right)$, 3) $W\left(K_{m,n}\right) = m+n-1$, 4) если $w\left(K_{m,n}\right) \le t \le W\left(K_{m,n}\right)$, то $K_{m,n} \in \mathfrak{R}_t$, 5) $\Theta_{\lambda_1}(K_{m,n}) = Int\left(m+n-\sigma\left(m,n\right),\sigma\left(m,n\right)\right)$.

Далее поставленные задачи решаются для деревьев.

Пусть D – дерево с $V(D)=\{b_1,...,b_p\}$, $p \ge 1$. Для любых i,j, где $1 \le i \le p$, $1 \le j \le p$, обозначим через $P(b_i,b_j)$ простую цепь, соединяющую вершины b_i и b_j, через $VP(b_i,b_j)$ и $EP(b_i,b_j)$ – множество вершин и ребер цепи $P(b_i,b_j)$, соответственно.

Для любых i,j, где $1 \le i \le p$, $1 \le j \le p$, положим:

$$\operatorname{int} VP(b_i,b_j) \equiv VP(b_i,b_j) \setminus (\{b_i\} \cup \{b_j\}),$$

$$\widetilde{V}P(b_i,b_j) \equiv VP(b_i,b_j) \cup \left(\bigcup_{x \in \operatorname{int} VP(b_i,b_j)} I_{D,v}(x) \right),$$

$$TP(b_i,b_j) \equiv \begin{cases} \bigcup\limits_{x \in \operatorname{int} VP(b_i,b_j)} I_{D,e}(x), & \text{если} \quad \operatorname{int} VP(b_i,b_j) \ne \varnothing \\ EP(b_i,b_j), & \text{если} \quad \operatorname{int} VP(b_i,b_j) = \varnothing. \end{cases}$$

Положим $M(D) \equiv \max\limits_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}} \left| TP(b_i,b_j) \right|$.

Теорема 1.5.2. Пусть D – дерево. Тогда:
1) $D \in \mathfrak{R}_{\lambda_1}$, 2) $w_{\lambda_1}(D) = \Delta(D)$, 3) $W_{\lambda_1}(D) = M(D)$, 4) если $w_{\lambda_1}(D) \le t \le W_{\lambda_1}(D)$, то $D \in \mathfrak{R}_{\lambda_1,t}$, 5) $\Theta_{\lambda_1}(D) = Int\left(\Delta(D), M(D)-\Delta(D)+1\right)$.

Завершается параграф исследованием поставленных задач для выпуклых двудольных графов.

Определение. Двудольный граф $G = G\left(X,Y,E\right)$ с $X = \left\{x_1,x_2,\ldots,x_m\right\}$ и $Y = \left\{y_1,y_2,\ldots,y_n\right\}$ является выпуклым относительно данных нумераций вершин множеств X и Y, если выполняются условия: 1) для любого i, $1 \le i \le m$, и любых j_1,j_2,j_3, удовлетворяющих неравенству $1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n$, из $\left(x_i,y_{j_1}\right) \in E$, $\left(x_i,y_{j_3}\right) \in E$ вытекает $\left(x_i,y_{j_2}\right) \in E$, 2) для любого j, $1 \le j \le n$, и любых i_1,i_2,i_3, удовлетворяющих неравенству $1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m$, из $\left(x_{i_1},y_j\right) \in E$, $\left(x_{i_3},y_j\right) \in E$ вытекает $\left(x_{i_2},y_j\right) \in E$.

Определение. Двудольный граф $G = G\left(X,Y,E\right)$ является выпуклым, если существуют такие нумерации $\left\{x_1,x_2,\ldots,x_m\right\}$ всех вершин множества X и

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ всех вершин множества Y, относительно которых G является выпуклым.

Теорема 1.5.3. Пусть двудольный граф $G = G(X, Y, E)$ с $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ является выпуклым относительно данных нумераций вершин множеств X и Y. Тогда:

1. существует интервальная $\left(1 + L\left(\left\{i + j \,\middle|\, (x_i, y_j) \in E\right\}\right) - l\left(\left\{i + j \,\middle|\, (x_i, y_j) \in E\right\}\right)\right)$-раскраска графа G;
2. $w(G) \le 1 + L\left(\left\{i + j \,\middle|\, (x_i, y_j) \in E\right\}\right) - l\left(\left\{i + j \,\middle|\, (x_i, y_j) \in E\right\}\right)$;
3. $W(G) \ge 1 + L\left(\left\{i + j \,\middle|\, (x_i, y_j) \in E\right\}\right) - l\left(\left\{i + j \,\middle|\, (x_i, y_j) \in E\right\}\right)$.

Во второй главе сформулирована задача достроения интервальных раскрасок полных двудольных графов (§1), для решения которой осуществлено исследование структуры произвольной интервальной раскраски полного двудольного графа $K_{m,n}$ при любых $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ (§2), показывающее, что произвольная интервальная раскраска полного двудольного графа $K_{m,n}$ состоит из интервальных раскрасок его реберно непересекающихся подграфов $G_1, \ldots, G_{\frac{mn}{(\sigma(m,n))^2}}$, каждый из которых изоморфен графу $K_{\sigma(m,n), \sigma(m,n)}$.

В §1 главы 2 приводится формулировка задачи достроения интервальных раскрасок полных двудольных графов.

Задача достроения интервальных раскрасок полных двудольных графов. Каким условиям должны удовлетворять целые неотрицательные числа m', n', чтобы произвольную интервальную на $V(K_{m,n})$ t-раскраску полного двудольного графа $K_{m,n}$ можно было достроить до интервальной на $V(K_{m+m',n+n'})$ t'-раскраски полного двудольного графа $K_{m+m',n+n'}$ для какого-либо t', $t' \ge t$?

Для нахождения достаточного условия достроения интервальных раскрасок полных двудольных графов исследована структура этих раскрасок. С целью удобства исследование ведется на табличном аналоге поставленной задачи.

Пусть имеем незаполненную прямоугольную таблицу $T = T(n, m)$. Множество строк таблицы T обозначим через $X(T)$, множество столбцов – через $Y(T)$, множество клеток – $K(T)$; при возможности будем писать проще: X, Y и K, соответственно. Строки и столбцы таблицы назовем ее рядами.

Если $x \in X(T)$, $y \in Y(T)$, то через (x, y) обозначим клетку таблицы T на пересечении ее строки x и столбца y. Для $X' \subseteq X(T)$, $Y' \subseteq Y(T)$ в случае $X' \ne \varnothing$, $Y' \ne \varnothing$ положим $(X', Y') = \{(x, y) \in K(T) / x \in X', y \in Y'\}$, и через $T(X', Y')$ будем обозначать подтаблицу таблицы T, для которой $K(T(X', Y')) = (X', Y')$, а

если хотя бы одно из множеств X', Y' пусто, то считаем $(X', Y') = \varnothing$, $T(X', Y')$ – пустой подтаблицей.

Скажем, что таблица T заполнена, если в ее каждую клетку вписано одно и только одно натуральное число. Число, вписанное в клетку, будем называть ее содержимым.

Скажем, что заполнение таблицы T является правильным, если ни в каком ряду T нет различных клеток с одинаковым содержимым. Множество всех правильных заполнений таблицы T обозначим через $\Pi(T)$.

Если $x \in X(T)$, $y \in Y(T)$, $\gamma \in \Pi(T)$, то содержимое клетки (x, y) при заполнении γ будем обозначать через $c((x, y), \gamma)$. Для $U \subseteq K(T)$, $\gamma \in \Pi(T)$ в случае $U \neq \varnothing$ положим $C(U, \gamma) = \bigcup_{(x,y) \in U} \{c((x, y), \gamma)\}$, а при $U = \varnothing$ считаем $C(U, \gamma) = \varnothing$.

Непустое конечное подмножество D множества $\mathbb{Z}_+$ назовем разрывным, если D не является интервалом, а число t назовем разрывом D, если $l(D) < t < L(D)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, $t \notin D$. Множество разрывов разрывного множества D обозначим через $raz(D)$.

Скажем, что правильное заполнение таблицы T является интервальным, если для каждого ряда T множество содержимых его клеток является интервалом.

Для $p \in \mathbb{N}$, $i \in Int(1, p)$ определим множество $R(i, p) = \{j \in \mathbb{N} / j \equiv i (\mathrm{mod}\, p)\}$.

Для $\gamma \in \Pi(T)$, $D \subset \mathbb{N}$, $U \subseteq K(T)$ положим

$$f(D, U, \gamma) = \left|\{(x, y) / (x, y) \in U, c((x, y), \gamma) \in D\}\right|.$$

При употреблении обозначений – в тех случаях, когда ясно, о каком заполнении речь – будем использовать сокращенные обозначения, опуская символ названия заполнения: так, например, будем писать $f(D, U)$ вместо $f(D, U, \gamma)$; для компактной записи содержимого клетки (x, y) будем вместо образующейся при таком сокращении записи $c((x, y))$ использовать запись $c(x, y)$, а в случаях, когда U представляется в виде (X_0, Y_0), где $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ – запись $C(X_0, Y_0)$ вместо $C((X_0, Y_0))$, образующейся при сокращении.

Условимся считать, что $X(T(n, m)) = \{x_1, ..., x_n\}$, $Y(T(n, m)) = \{y_1, ..., y_m\}$.

Пусть $V(K_{m,n}) = \{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m\}$, $E(K_{m,n}) = \{(u_i, v_j) / 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ и α – правильная раскраска полного двудольного графа $K_{m,n}$. Сопоставим раскраске α заполнение γ таблицы $T(n, m)$, полагая $c((x_i, y_j), \gamma) = \alpha((u_i, v_j))$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Ясно, что $\gamma \in \Pi(T(n, m))$. Очевидно, что симметричным образом правильному заполнению γ таблицы $T(n, m)$ можно сопоставить правильную раскраску α графа $K_{m,n}$. Заметим, что при этом между множеством интервальных на $V(K_{m,n})$ раскрасок графа $K_{m,n}$ и множеством

интервальных заполнений таблицы $T(n,m)$ устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Теперь сформулируем табличный аналог задачи достроения интервальных раскрасок полных двудольных графов.

Задача достроения интервальных заполнений прямоугольных таблиц.

Каким условиям должны удовлетворять целые неотрицательные числа m', n', чтобы для произвольного интервального заполнения γ таблицы $T(n,m)$ существовало интервальное заполнение γ' таблицы $T(n+n', m+m')$, при котором заполнение подтаблицы $T(\{x_1,...,x_n\},\{y_1,...,y_m\})$ совпадает с γ ?

В §2 главы 2 осуществлено (начинающееся со случаев простейших соотношений между m и n и постепенно развиваемое в направлении произвольного случая) исчерпывающее исследование структуры интервальных заполнений прямоугольных таблиц $T(n,m)$ и сформулировано достаточное условие достроения интервальных раскрасок полных двудольных графов.

Теорема 2.2.1. Пусть $\sigma(m,n)=1$, и интервальное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что $c((x_1,y_j),\alpha)=j$ при $j=1,...,m$ и $c((x_i,y_1),\alpha)=i$ при $i=1,...,n$. Тогда при $i=1,...,n$, $j=1,...,m$ $c((x_i,y_j),\alpha)=i+j-1$.

Лемма 2.2.1. Пусть B разрывное множество, $|B|=q$, $B\subseteq Int(a,2q-1)$. Если $|B\cap R(i,q)|=1$ при $i=1,...,q$, то существует такое $t>a+q-1$, что $t\in raz(B)$.

Лемма 2.2.2. Пусть $n,\lambda,k\in\mathbb{Z}_+$, $n\geq 2$, $\lambda\geq 1$, $k<n$, $m=\lambda n+k$, и интервальное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для некоторого i_0, $1\leq i_0\leq n$ и $\tau=1,...,\lambda$ $C(\{x_{i_0}\},Y_\tau)=Int((\tau-1)n+1,n)$ и, если $k>0$, $C(\{x_{i_0}\},Y_{\lambda+1})=$ $=Int(\lambda n+1,k)$, где $Y_\tau=\{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau=1,...,\lambda$, $Y_{\lambda+1}=Y\setminus\bigcup_{\tau=1}^{\lambda}Y_\tau$. Тогда:

1) $\tau n\in C(X,\{y_j\})$, $\tau=1,...,\lambda$, $j=(\tau-1)n+1,...,\tau n$, и, если $k>0$, то $(\lambda+1)n\in C(X,\{y_j\})$, $j=\lambda n+1,...,m$;
2) $f(\{\tau n\},K)=f(\{\tau n\},(X,Y_\tau))=n$, $\tau=1,...,\lambda$, и, если $k>0$, то $f(\{(\lambda+1)n\},K)=f(\{(\lambda+1)n\},(X,Y_{\lambda+1}))=k$;
3) $C(X,Y_\tau)\subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, $\tau=1,...,\lambda$, и, если $k>0$, то $C(X,Y_{\lambda+1})\subseteq Int(\lambda n+1,k+n-1)$;
4) $\tau n\in C(\{x_i\},Y_\tau)$, $\tau=1,...,\lambda$, $i=1,...,n$;
5) $f(R(j,n),(X,Y_\tau))=n$, $j=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda$.

Пусть $n,\lambda,k\in\mathbb{Z}_+$, $n\geq 2$, $\lambda\geq 1$, $k<n$, $m=\lambda n+k$, $\alpha\in\Pi(T(n,m))$, $Y_\tau=$ $=\{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau=1,...,\lambda$, $Y_{\lambda+1}=Y\setminus\bigcup_{\tau=1}^{\lambda}Y_\tau$. В этом случае будем использовать

обозначения $H(\tau,\alpha)=\bigcup_{i=1}^{n}F_{\geq}(2,n,(\{x_i\},Y_\tau),\alpha)$, $\tau=1,...,\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$, $Q(\alpha)=\{\tau/1\leq\tau\leq\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil,$ $H(\tau,\alpha)\neq\varnothing\}$.

Лемма 2.2.3. Пусть $n,\lambda,k\in\mathbb{Z}_+$, $n\geq 2$, $\lambda\geq 1$, $k<n$, $m=\lambda n+k$. Пусть правильное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $i=1,...,n$ $C((\{x_i\},Y),\alpha)$ является интервалом, для $j=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda$ $f(R(j,n),(X,Y_\tau),\alpha)=n$, для $\tau=1,...,\lambda$ $C\left(\left(X,Y_\tau\right),\alpha\right)\subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, и, если $k>0$, $C\left(\left(X,Y_{\lambda+1}\right),\alpha\right)\subseteq$ $\subseteq Int(\lambda n+1,k+n-1)$, где $Y_\tau=\{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau=1,...,\lambda$, $Y_{\lambda+1}=Y\setminus\bigcup_{\tau=1}^{\lambda}Y_\tau$. Тогда если $Q(\alpha)\cap Int(1,\lambda)\neq\varnothing$, то $l(Q(\alpha))=1$.

Лемма 2.2.4. Пусть $n,\lambda,k\in\mathbb{Z}_+$, $n\geq 2$, $\lambda\geq 1$, $k<n$, $m=\lambda n+k$, и правильное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $i=1,...,n$ $C((\{x_i\},Y),\alpha)$ интервал, для $j=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda$ $f(R(j,n),(X,Y_\tau),\alpha)=n$, для $\tau=1,...,\lambda$ $C\left(\left(X,Y_\tau\right),\alpha\right)\subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, и, если $k>0$, $C\left(\left(X,Y_{\lambda+1}\right),\alpha\right)\subseteq$ $\subseteq Int(\lambda n+1,k+n-1)$, где $Y_\tau=\{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau=1,...,\lambda$, $Y_{\lambda+1}=Y\setminus\bigcup_{\tau=1}^{\lambda}Y_\tau$. Тогда $Q(\alpha)\cap Int(1,\lambda)=\varnothing$.

Лемма 2.2.5. Пусть $n,\lambda\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\lambda\geq 2$, $m=\lambda n$, и правильное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $i=1,...,n$ $C((\{x_i\},Y),\alpha)$ интервал, для $j=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda$ $f(R(j,n),(X,Y_\tau),\alpha)=n$, и для $\tau=1,...,\lambda$ $C\left(\left(X,Y_\tau\right),\alpha\right)\subseteq$ $\subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, где $Y_\tau=\{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau=1,...,\lambda$. Тогда для $i=1,...,n$: 1) $C(\{x_i\},Y_\lambda)$ интервал, 2) $C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1}Y_\tau)$ интервал, 3) $L(C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1}Y_\tau))+1=$ $l(C(\{x_i\},Y_\lambda))$, 4) $C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1}Y_\tau)\oplus(m-n)=C(\{x_i\},Y_\lambda)$.

Утверждение 2.2.1. Пусть $n,\lambda\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $m=\lambda n$, и правильное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $i=1,...,n$ $C((\{x_i\},Y),\alpha)$ интервал, для $j=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda$ $f(R(j,n),(X,Y_\tau),\alpha)=n$, и для $\tau=1,...,\lambda$ $C\left(\left(X,Y_\tau\right),\alpha\right)\subseteq$ $\subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, где для $\tau=1,...,\lambda$ $Y_\tau=\{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$. Тогда

1) $C(\{x_i\},Y_\tau)$ интервал, $i=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda$,

2) если $\lambda\geq 2$, то при $i=1,...,n$, $\tau=1,...,\lambda-1$ $C(\{x_i\},Y_\tau)\oplus n=C(\{x_i\},Y_{\tau+1})$.

Теорема 2.2.2. Пусть $n,\lambda \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m = \lambda n$, и интервальное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $\tau = 1,...,\lambda$ и некоторого i_0, $1 \leq i_0 \leq n$, $C((\{x_{i_0}\},Y_\tau),\alpha) = Int((\tau-1)n+1,n)$, где $Y_\tau = \{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau = 1,...,\lambda$. Тогда:

1) $C(\{x_i\},Y_\tau)$ интервал, $i = 1,...,n$, $\tau = 1,...,\lambda$,

2) подтаблица $T(X,Y_\tau)$ интервально заполнена, $\tau = 1,...,\lambda$,

3) если $\lambda \geq 2$, то при $i = 1,...,n$, $\tau = 1,...,\lambda-1$ $C(\{x_i\},Y_\tau) \oplus n = C(\{x_i\},Y_{\tau+1})$,

4) $C(X,Y_\tau) \subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, $\tau = 1,...,\lambda$.

Лемма 2.2.6. Пусть $n,\lambda,k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k < n$, $m = \lambda n + k$, и правильное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $i = 1,...,n$ $C((\{x_i\},Y),\alpha)$ интервал, для $j = 1,...,n$, $\tau = 1,...,\lambda$ $f(R(j,n),(X,Y_\tau),\alpha) = n$, для $\tau = 1,...,\lambda$ $C\left(\left(X,Y_\tau\right),\alpha\right) \subseteq$ $\subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, $C\left(\left(X,Y_{\lambda+1}\right),\alpha\right) \subseteq Int(\lambda n+1,k+n-1)$, где

$Y_\tau = \{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau = 1,...,\lambda$, $Y_{\lambda+1} = Y \setminus \bigcup_{\tau=1}^{\lambda} Y_\tau$. Тогда для $i = 1,...,n$: 1) $C(\{x_i\},Y_{\lambda+1})$ интервал, 2) $C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=1}^{\lambda} Y_\tau)$ интервал, 3) $L(C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=1}^{\lambda} Y_\tau))+1 = l(C(\{x_i\},Y_{\lambda+1}))$, 4) $L(C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=1}^{\lambda} Y_\tau)) \oplus \lambda n = C(\{x_i\},Y_{\lambda+1})$.

Утверждение 2.2.2. Пусть $n,\lambda,k \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$, $\lambda \geq 1$, $k < n$, $m = \lambda n + k$, и правильное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что для $i = 1,...,n$ $C((\{x_i\},Y),\alpha)$ интервал, для $j = 1,...,n$, $\tau = 1,...,\lambda$ $f(R(j,n),(X,Y_\tau),\alpha) = n$, для $\tau = 1,...,\lambda$ $C\left(\left(X,Y_\tau\right),\alpha\right) \subseteq Int((\tau-1)n+1,2n-1)$, $C\left(\left(X,Y_{\lambda+1}\right),\alpha\right) \subseteq$ $\subseteq Int(\lambda n+1,k+n-1)$, где $Y_\tau = \{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau = 1,...,\lambda$, $Y_{\lambda+1} = Y \setminus \bigcup_{\tau=1}^{\lambda} Y_\tau$. Тогда для $i = 1,...,n$:

1) $C(\{x_i\},Y_\tau)$ интервал, $\tau = 1,...,\lambda$,

2) если $\lambda \geq 2$, то при $\tau = 1,...,\lambda-1$ $C(\{x_i\},Y_\tau) \oplus n = C(\{x_i\},Y_{\tau+1})$,

3) при $1 \leq a \leq \lambda$, $a \in \mathbb{N}$, $C(\{x_i\},\bigcup_{\tau=a}^{\lambda+1} Y_\tau)$ интервал,

и, если $k > 0$, то

4) $C(\{x_i\},Y_{\lambda+1})$ интервал,

5) $C(\{x_i\},Y_\lambda) \oplus n = C(\{x_i\},Y_{\lambda+1})$.

Лемма 2.2.7. Пусть $n,k,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{N}$, $k < n$, $m = \lambda_1 n + k$, $n = \lambda_2 k$, и интервальное заполнение α таблицы $T(n,m)$ таково, что $C((\{x_1\},Y_\tau),\alpha) = Int(1+(\tau-1)n,n)$, $\tau = 1,...,\lambda_1$, $C((\{x_1\},Y_{\lambda_1+1}),\alpha) = Int(1+\lambda_1 n,k)$, $C((X_\varepsilon,\{y_1\}),\alpha) = Int(1+(\varepsilon-1)k,k)$,

$\varepsilon = 1,...,\lambda_2$, где $Y_\tau = \{y_{1+(\tau-1)n},...,y_{\tau n}\}$, $\tau = 1,...,\lambda_1$, $Y_{\lambda_1+1} = Y \setminus \bigcup_{\tau=1}^{\lambda_1} Y_\tau$, $X_\varepsilon = \{y_{1+(\varepsilon-1)k},...,y_{\varepsilon k}\}$, $\varepsilon = 1,...,\lambda_2$. Тогда:

1) $C(X, Y_{\lambda_1+1}) \subseteq Int(\lambda_1 n + 1, k + n - 1)$,
2) подтаблица $T(X, Y_{\lambda_1+1})$ интервально заполнена,
3) подтаблица $T(X_\varepsilon, Y_{\lambda_1+1})$ интервально заполнена, $\varepsilon = 1,...,\lambda_2$,
4) $C(X_\varepsilon, \{y_j\}) \oplus k = C(X_{\varepsilon+1}, \{y_j\})$, $\varepsilon = 1,...,\lambda_2 - 1$, $j = \lambda_1 n + 1,...,\lambda_1 n + k$,
5) для $\varepsilon = 1,...,\lambda_2$ $\left(\lambda_1 n + \varepsilon k\right) \in C(\{x_i\}, Y_{\lambda_1+1})$, $i = (\varepsilon - 1)k + 1,...,\varepsilon k$,
6) $f(\{\lambda_1 n + \varepsilon k\}, (X_\varepsilon, Y_{\lambda_1+1})) = k$, $\varepsilon = 1,...,\lambda_2$,
7) $C(X_\varepsilon, Y_{\lambda_1+1}) \subseteq Int(\lambda_1 n + 1 + \left(\varepsilon - 1\right)k, 2k - 1)$, $\varepsilon = 1,...,\lambda_2$.

Теорема 2.2.4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, $\sigma(m,n) \geq 2$, $\dfrac{m}{\sigma(m,n)} = p$, $\dfrac{n}{\sigma(m,n)} = q$. При любом интервальном заполнении α таблицы $T(n,m)$ множества строк и столбцов $T(n,m)$ можно разбить на $\sigma(m,n)$-элементные подмножества $X_1,...,X_q$ и $Y_1,...,Y_p$, соответственно, так что

1) при $\varepsilon = 1,...,q$, $\tau = 1,...,p$ подтаблица $T(X_\varepsilon, Y_\tau)$ интервально заполнена,
2) при $\varepsilon = 1,...,q$, $\tau = 1,...,p$
$$C((X_\varepsilon, Y_\tau), \alpha) \subseteq Int((\varepsilon + \tau - 2)\sigma(m,n) + l(C(K)), 2\sigma(m,n) - 1),$$
3) если $p \geq 2$, то при $i = 1,...,n$, $\tau = 1,...,p-1$ $C((\{x_i\}, Y_\tau), \alpha) \oplus \oplus \sigma(m,n) = C((\{x_i\}, Y_{\tau+1}), \alpha)$, если $q \geq 2$, то при $j = 1,...,m$, $\varepsilon = 1,...,q-1$ $C((X_\varepsilon, \{y_j\}), \alpha) \oplus \sigma(m,n) = C((X_{\varepsilon+1}, \{y_j\}), \alpha)$.

Теорема 2.2.5. Для любых натуральных n и m при любом интервальном заполнении таблицу $T(n,m)$ можно разбить на $\dfrac{mn}{(\sigma(m,n))^2}$ подтаблиц размерности $\sigma(m,n) \times \sigma(m,n)$, каждая из которых интервально заполнена.

Теорема 2.2.6. (Графовый аналог теоремы 2.2.5) Пусть $\sigma = \sigma(m,n)$, $s = \dfrac{mn}{\sigma^2}$. Тогда при любой интервальной на $V(K_{m,n})$ раскраске граф $K_{m,n}$ можно разбить на s полных двудольных подграфов $K^1_{\sigma,\sigma},...,K^s_{\sigma,\sigma}$, так что $K^i_{\sigma,\sigma}$ окрашен интервально на $V(K^i_{\sigma,\sigma})$, $i = 1,...,s$.

Теорема 2.2.7. Если $m' = \mu\sigma(m,n)$, $n' = \nu\sigma(m,n)$, где $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, то любую интервальную на $V(K_{m,n})$ t-раскраску α полного двудольного графа $K_{m,n}$

можно достроить до интервальной на $V(K_{m+m',n+n'})$ t'-раскраски $(t' \geq t)$ полного двудольного графа $K_{m+m',n+n'}$.

В §3 главы 2 перечислены результаты, установленные П.А. Петросяном с помощью результатов §2 главы 2 и касающиеся вопросов реализуемости числовых наборов в интервальных раскрасках полных двудольных графов.

В третьей главе изучаются задачи о правильных реберных раскрасках графов, интервальных на некотором подмножестве R его вершин. При этом рассматриваются различные модификации задачи, в частности, такие, в которых для вершин графа вне подмножества R интервальность спектра не разрешается, а также такие, в которых для вершин подмножества R требуется не просто интервальность, а непрерывность спектра.

В §1 главы 3 обсуждена актуальность исследований правильных реберных раскрасок графов, интервальных на некотором подмножестве R множества вершин графа.

Задачи об интервальных на R раскрасках особенно важны для графов, не принадлежащих классу $\mathfrak{N}$. Построение таких раскрасок позволяет обеспечить интервальным спектром некоторую часть вершин графа. В практических интерпретациях, связанных с построением “безоконных” расписаний учебных процессов или расписаний “непрерывных” производственных процессов, такой подход позволяет организовать непрерывную работу для некоторой части “важных” участников процесса. Отметим, что весьма интересны исследования интервальных на R раскрасок двудольных графов в тех случаях, когда R совпадает с множеством всех вершин одной из долей графа. В интерпретациях такие задачи соответствуют, в частности, задачам о существовании и построении учебных расписаний, являющихся “безоконными” для одной из “сторон” учебного процесса – например, для учебных групп.

Заметим также, что интерес к интервальным на R раскраскам может распространяться и на графы из класса $\mathfrak{N}$. Это обстоятельство объясняется тем, что вместо очевидного для графа $G \in \mathfrak{N}$ неравенства

$$\chi'(G) = \Delta(G) \leq w_R(G) \leq w(G) \leq W(G) \leq W_R(G) \leq |E(G)|,$$

верного для любого $R \subseteq V(G)$, можно в каких-то случаях, когда $R \neq V(G)$, прогнозировать появление более информативного неравенства

$$\chi'(G) = \Delta(G) \leq w_R(G) < w(G) \leq W(G) < W_R(G) \leq |E(G)|,$$

что означает возможность уменьшения или увеличения общего количества цветов в раскраске за счет отказа от выполнения условия интервальности спектра для вершин из $V(G) \setminus R$.

В §2 главы 3 для некоторых подмножеств R множества $V(K_{2n})$ вершин полного графа K_{2n} получены оценки значений параметров $w_R(K_{2n})$ и $W_R(K_{2n})$, а также исследованы такие раскраски полного графа K_n, которые для любой вершины $x \in V(K_n)$ обеспечивают интервальный спектр в строгой зависимости

от принадлежности этой вершины к заранее заданному подмножеству вершин графа.

Скажем, что правильная t-раскраска φ графа G обладает $(R,\overline{R})$-свойством ($\chi'(G) \le t \le |E(G)|$ и $R \subseteq V(G)$), если для любой $x \in V(G)$ $S_G(x,\varphi)$ является интервалом тогда и только тогда, когда $x \in R$.

Подмножество $R \subseteq V(G)$ назовем интервально-обособляемым подмножеством вершин графа G, если $\exists t_0$, $\chi'(G) \le t_0 \le |E(G)|$, при котором существует обладающая $(R,\overline{R})$-свойством t_0-раскраска графа G.

Теорема 3.2.1. При $n \ge 2$ любое подмножество $R \subset V(K_{2n+1})$ является интервально-обособляемым подмножеством вершин графа K_{2n+1}.

Теорема 3.2.2. При $n \ge 2$ любое подмножество $R \subseteq V(K_{2n})$ является интервально-обособляемым подмножеством вершин графа K_{2n}.

В §3 главы 3 для регулярных графов различных классов и для некоторых бирегулярных[6] двудольных графов найдены оценки снизу для мощности такого подмножества R множества вершин графа, для вершин которого возможно обеспечить требуемое свойство раскраски (интервальность или непрерывность спектра).

Утверждение 3.3.5. Если G – регулярный граф с $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \ge$ $\ge \left\lceil \frac{|V(G)|}{1+\Delta(G)} \right\rceil$, такое, что существует непрерывная на R_0 $(1+\Delta(G))$-раскраска графа G.

Следствие 3.3.1. Если G – кубический граф, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \ge \left\lceil \frac{|V(G)|}{4} \right\rceil$, такое, что существует непрерывная на R_0 $\chi'(G)$-раскраска графа G.

Утверждение 3.3.6. Если G – регулярный граф с $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \ge$ $\ge \left\lceil \frac{|V(G)|}{\left\lceil \frac{1+\Delta(G)}{2} \right\rceil} \right\rceil$, такое, что существует интервальная на R_0 $(1+\Delta(G))$-раскраска графа G.

---

[6] Asratian A.S., Casselgren C.J., Vandenbussche J., West D.B., Proper path-factors and interval edge-coloring of (3, 4)-biregular bigraphs, J. Graph Theory 61, 2009, pp. 88–97.

Следствие 3.3.2. Если G – кубический граф, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{|V(G)|}{2}$, такое, что существует интервальная на R_0 $\chi'(G)$-раскраска графа G.

Для натуральных чисел m,l,n,k, где $m \geq n$, определим класс $Bip(m,l,n,k)$ двудольных графов следующим образом:

$$Bip(m,l,n,k) = \left\{ G = G(X,Y,E) \;\middle|\; \begin{array}{l} G = G(X,Y,E) \text{ является связным, } |X| = m, |Y| = n, \\ \text{для } \forall x \in X \;\; d_G(x) = l, \text{ для } \forall y \in Y \;\; d_G(y) = k \end{array} \right\}$$

Утверждение 3.3.7. Если $k \geq 4$ и $G \in Bip(m,k-1,n,k)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{k-1}{2k-1}|V(G)| + \left\lceil \frac{k}{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil (2k-1)} |V(G)| \right\rceil$, такое, что существует интервальная на R_0 k-раскраска графа G.

Следствие 3.3.3. Если $G \in Bip(m,k-1,n,k)$, $k \geq 4$ и k четно, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{k+1}{2k-1}|V(G)|$, такое, что существует интервальная на R_0 k-раскраска графа G.

Следствие 3.3.4. Если $G \in Bip(m,3,n,4)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{5}{7}|V(G)|$, такое, что существует интервальная на R_0 4-раскраска графа G.

Следствие 3.3.5. Если $G \in Bip(m,4,n,5)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \left\lceil \frac{17}{27}|V(G)| \right\rceil$, такое, что существует интервальная на R_0 5-раскраска графа G.

Утверждение 3.3.8. Если $k \geq 3$ и $G \in Bip(m,k-1,n,k)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{k}{2k-1}|V(G)|$, такое, что существует непрерывная на R_0 k-раскраска графа G.

Следствие 3.3.6. Если $G \in Bip(m,2,n,3)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{3}{5}|V(G)|$, такое, что существует непрерывная на R_0 3-раскраска графа G.

Следствие 3.3.7. Если $G \in Bip(m,3,n,4)$, то существует подмножество $R_0 \subseteq V(G)$, удовлетворяющее условию $|R_0| \geq \frac{4}{7}|V(G)|$, такое, что существует непрерывная на R_0 4-раскраска графа G.

В §4 главы 3 рассмотрены задачи о правильных реберных раскрасках двудольных мультиграфов, интервальных для вершин одной из долей мультиграфа. Предложен полиномиальный эвристический алгоритм, позволяющий оценивать сверху наименьшее возможное число цветов в таких раскрасках (для случая полных двудольных графов найдено точное значение параметра).

Теорема 3.4.1. Пусть $G = (V_1(G), V_2(G), E(G))$ – двудольный мультиграф. Тогда для любого t, $w_{V_1(G)}(G) \leq t \leq W_{V_1(G)}(G) = |E(G)|$, существует интервальная на $V_1(G)$ t-раскраска мультиграфа G.

Далее исследуются задачи оценивания параметра $w_R(G)$ в случае, когда G является произвольным двудольным графом, а R совпадает с множеством всех вершин одной из его долей.

Пусть $G = G(X,Y,E)$ – двудольный граф.

Скажем, что система $\mathfrak{g}_s(G)$ подграфов $G_1(X_1,Y_1,E_1),\ldots,G_s(X_s,Y_s,E_s)$ графа G является Y-лестничной, если удовлетворяются следующие условия:

1. для $i = 1,\ldots,s$ $X_i \subseteq X$, $Y_i \subseteq Y$, $E_i \subseteq E$, $X_i \neq \varnothing$, $Y_i \neq \varnothing$, $E_i \neq \varnothing$;
2. при $1 \leq i' < i'' \leq s$ $E_{i'} \cap E_{i''} = \varnothing$, $Y_{i'} \cap Y_{i''} = \varnothing$;
3. $\bigcup_{i=1}^{s} E_i = E$; $\bigcup_{i=1}^{s} X_i = X$; $\bigcup_{i=1}^{s} Y_i = Y$;
4. для $\forall i$, $1 \leq i \leq s$, существует непрерывная на Y_i $\Delta(G_i)$-раскраска графа $G_i(X_i,Y_i,E_i)$.

Если система $\mathfrak{g}_s(G)$ подграфов графа G является Y-лестничной, то положим $\nu(\mathfrak{g}_s(G)) \equiv \sum_{i=1}^{s} \Delta(G_i)$.

Легко видеть, что для любого двудольного графа $G(X,Y,E)$ Y-лестничная система подграфов существует.

Теорема 3.4.2. Если система $\mathfrak{g}_s(G)$ подграфов $G_1(X_1,Y_1,E_1),\ldots$ $\ldots,G_s(X_s,Y_s,E_s)$ двудольного графа $G=G(X,Y,E)$ является Y-лестничной, то существует интервальная на Y $\nu(\mathfrak{g}_s(G))$-раскраска графа G.

Следствие 3.4.1. Пусть $G=G(X,Y,E)$ – двудольный граф, а система $H_s(G)$ его подграфов $G_1(X_1,Y_1,E_1)$,…, $G_s(X_s,Y_s,E_s)$ такова, что удовлетворяются условия

1) для $i=1,\ldots,s$, $X_i \subseteq X$, $Y_i \subseteq Y$, $E_i \subseteq E$, $X_i \neq \varnothing$, $Y_i \neq \varnothing$, $E_i \neq \varnothing$;
2) при $1 \le i' < i'' \le s$, $E_{i'} \cap E_{i''} = \varnothing$, $Y_{i'} \cap Y_{i''} = \varnothing$;
3) $\bigcup_{i=1}^{s} E_i = E$, $\bigcup_{i=1}^{s} X_i = X$, $\bigcup_{i=1}^{s} Y_i = Y$;
4) для $\forall i,\ 1 \le i \le s$, из $e=(x,y) \in E_i$, где $x \in X_i$, $y \in Y_i$, вытекает неравенство $d_{G_i}(x) \le d_{G_i}(y)$.

Тогда система $H_s(G)$ является Y-лестничной системой подграфов графа G.

Предложен полиномиальный алгоритм А, который по любому двудольному графу $G=G(X,Y,E)$ выдает на **Выходе** систему $H_s(G)$ подграфов графа G, удовлетворяющую условиям следствия 3.4.1.

Следствие 3.4.2. Пусть $G=G(X,Y,E)$ – двудольный граф, и система $H_s(G)$ подграфов графа G построена в результате применения к графу G алгоритма **А**. Тогда существует интервальная на Y $\nu(H_s(G))$-раскраска графа G.

Отметим некоторые выводы, касающиеся величин $w_X(G)$ и $w_Y(G)$ для двудольных графов $G=G(X,Y,E)$, принадлежащих классу $Bip(m,l,n,k)$.

Утверждение 3.4.1. Если $G=G(X,Y,E) \in Bip(m,l,n,k)$, то $w_Y(G)=k$.

Следствие 3.4.3. Если $G=G(X,Y,E) \in Bip(m,l,n,k)$, то $w_X(G) \le l \cdot \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil$.

Из следствия 3.4.3 и леммы 1.5.1 вытекает

Следствие 3.4.5. Если R – множество всех вершин произвольной из долей полного двудольного графа $K_{m,n}$ при любых натуральных m и n, то

$$w_R(K_{m,n}) = (m+n-|R|) \cdot \left\lceil \frac{|R|}{m+n-|R|} \right\rceil .$$

В четвертой главе исследованы циклически-непрерывные реберные раскраски простых циклов и деревьев, а также построен пример двудольного графа, не обладающего циклически-непрерывной реберной раскраской.

В §1 главы 4 рассмотрены циклически-непрерывные реберные раскраски простых циклов.

Определим функцию $\varepsilon : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Для $\forall k \in \mathbb{N}$ положим:

$$\varepsilon(k) = 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

Для любых $q \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$ и $j \in \{0,1\}$ определим множество $Int_{(j)}(q,h)$ следующим образом:

$$Int_{(j)}(q,h) \equiv \left\{ m \in Int(q,h) \middle| \ \varepsilon(m) = 1 - j \right\}.$$

Утверждение 4.1.1. Для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ $C_n \in \mathfrak{R}_{\lambda_3}$, $n \in \Theta_{\lambda_3}(C_n)$; $\Theta_{\lambda_3}(C_3) = \{3\}$, $\Theta_{\lambda_3}(C_4) = \{2,3,4\}$.

Теорема 4.1.2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ $w_{\lambda_3}(C_n) = 3 - \varepsilon(n)$, $W_{\lambda_3}(C_n) = n$,

$$\Theta_{\lambda_3}(C_n) = \begin{cases} Int_{(1)}(3, n-2), \text{ если } n \text{ нечетное число}, \\ Int\left(2, \frac{n}{2}\right) \cup Int_{(0)}\left(\frac{n}{2} + 2 + \varepsilon\left(\frac{n}{2}\right) + (-1)^{\varepsilon\left(\frac{n}{2}\right)}, \frac{n}{2} - \varepsilon\left(\frac{n}{2}\right) - 1 - (-1)^{\varepsilon\left(\frac{n}{2}\right)} \right), \\ \qquad\qquad \text{если } n \text{ четное число}. \end{cases}$$

В §2 главы 4 рассмотрены циклически-непрерывные реберные раскраски деревьев.

Теорема 4.2.1. Пусть D – дерево. Тогда: 1) $D \in \mathfrak{R}_{\lambda_3}$, 2) $\Theta_{\lambda_3}(D) = \Theta_{\lambda_1}(D)$.

В §3 главы 4 построен пример двудольного графа, не обладающего циклически-непрерывной реберной раскраской.

Для любого натурального $m \geq 2$ положим:

$V_{0,m} \equiv \{x_0\}$, $V_{1,m} \equiv \{x_{i,j} / 1 \leq i < j \leq m\}$, $V_{2,m} \equiv \{y_{p,q} / 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq m\}$,

$E'_m \equiv \{(x_0, y_{p,q}) / 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq m\}$.

Для натуральных чисел i, j, m, удовлетворяющих неравенствам $m \geq 2$, $1 \leq i < j \leq m$, положим:

$E''_{i,j,m} \equiv \{(x_{i,j}, y_{i,q}) / 1 \leq q \leq m\} \cup \{(x_{i,j}, y_{j,q}) / 1 \leq q \leq m\}$.

Для любого натурального $m \geq 2$ определим граф $G(m)$ следующим образом:

$$G(m) \equiv \left(\bigcup_{k=0}^{2} V_{k,m}, E'_m \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq m} E''_{i,j,m} \right) \right).$$

Теорема 4.3.1. Для любого натурального $m \geq 8$ $G(m) \notin \mathfrak{R}_{\lambda_3}$.

В пятой главе исследована сложность задач о существовании таких вершинных раскрасок графов в два цвета, при которых в вершинной окрест-

ности любой вершины количества вершин разных цветов отличаются не более чем на 1.

В §1 главы 5 основная задача главы рассматривается в стандартной версии определения “окрестности” вершины, при которой сама вершина не считается принадлежащей своей окрестности. Рассматриваемая задача может применяться в целях повышения безопасности при моделировании систем, субъекты которых, подвергаясь воздействию двух противоборствующих влияний, не обладают способностью самозащиты.

2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$\left\| \{w \in I_{G,v}(v) / f(w) = 1\} \right| - \left| \{w \in I_{G,v}(v) / f(w) = 0\} \right\| \le 1 .$$

Теорема 5.1.1. Для двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$ задача определения того, существует ли локально-сбалансированное 2-разбиение графа G, является NP-полной.

В §2 главы 5 основная задача главы рассматривается в версии расширенного определения “окрестности” вершины, при которой сама вершина считается принадлежащей своей окрестности. Рассматриваемая задача может применяться в целях повышения безопасности при моделировании систем, субъекты которых, подвергаясь воздействию двух противоборствующих влияний, обладают способностью самозащиты.

2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$\left\| \{w \in \{v\} \cup I_{G,v}(v) / f(w) = 1\} \right| - \left| \{w \in \{v\} \cup I_{G,v}(v) / f(w) = 0\} \right\| \le 1 .$$

Теорема 5.2.1. Для двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$ задача определения того, существует ли локально-сбалансированное 2-разбиение графа G, является NP-полной.

Перечень публикаций по теме диссертации

1. Асратян А.С., Камалян Р.Р., Интервальные раскраски ребер мультиграфа, Прикладная математика, вып. 5, Ереван, ЕГУ, 1987, с. 25–34.
2. Asratian A.S., Kamalian R.R., Investigation on interval edge colorings of graphs, Journal of Combin. Theory, Series B, Vol. 62, №1, 1994, pp. 34–43.
3. Камалян Р.Р., Мирумян А.Н., Интервальные реберные раскраски двудольных графов одного класса, Доклады НАН РА, т. 97, № 4, 1997, с. 3–5.
4. Kamalian R.R., Mirumyan A.N., About minimal interval edge-coloring of bipartite graphs of a special kind, Transactions of the Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA and YSU, vol. 21, 2000, pp. 48–49.
5. Kamalian R.R., Mkrtchyan V.V., Sufficient condition for the property of a graph to be bipartite, Math. Prob. of Comp. Science, Vol. 23, 2004, pp. 100–101.
6. Kamalian R.R., Petrosyan P.A., On lower bound for $W(K_{2n})$, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 23, 2004, pp. 127–129.
7. Баликян С.В., Камалян Р.Р., Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G)=3$, Доклады НАН РА, т.105, №1, 2005, с. 21–27.
8. Kamalian R.R., Petrosyan P.A., On interval edge colorings of Harary graphs $H_{2n-2,2n}$, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 24, 2005, pp. 86–88.
9. Kamalian R.R., Petrosyan P.A., Interval colourings of some regular graphs, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 25, 2006, pp. 53–56.
10. Kamalian R.R., Petrosyan P.A., On interval colourings of complete k-partite graphs K_n^k, Math. Problems of Comp. Science, Vol. 26, 2006, pp. 28–32.
11. Баликян С.В., Камалян Р.Р., Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G)=4$ при расширенном определении окрестности вершины, Доклады НАН РА, т.106, №3, 2006, с. 218–226.
12. Kamalian R.R., On cyclically continuous edge colorings of trees, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 29, Yerevan, 2007, pp. 16–20.
13. Arakelyan H.Z., Kamalian R.R., On interval-separable subsets of vertices of a complete graph, Mathematical Problems of Computer Science, Vol. 31, Yerevan, 2008, pp. 108–115.
14. Камалян Р.Р., О числе цветов в циклически непрерывных реберных раскрасках простых циклов, Вестник РАУ, Ереван, №1, 2010, с. 13–21.
15. Камалян Р.Р., Об односторонне интервальных раскрасках двудольных графов, Вестник РАУ, Ереван, №2, 2010, с. 3–11.
16. Камалян Р.Р., О структуре интервальных раскрасок полных двудольных графов, Вестник РАУ, Ереван, №1, 2011, с. 47–56.

17. Kamalian R.R., Petrosyan P.A., A note on upper bounds for the maximum span in interval edge-colorings of graphs, Discrete Mathematics, 312(2012), pp. 1393–1399.
18. Kamalian R.R., On cyclically-interval edge colorings of trees, Buletinul Academiei de tiin e a Republicii Moldova, Matematica, № 1(68), 2012, pp. 50–58.
19. Kamalian R.R., On a Number of Colors in Cyclically Interval Edge Colorings of Simple Cycles, Open Journal of Discrete Mathematics, 2013, 3, pp. 43–48.
20. Kamalian R.R., Estimates for the number of vertices with an interval spectrum in proper edge colorings of some graphs, Buletinul Academiei de tiin e a Republicii Moldova, Matematica, № 3(76), 2014, pp. 3–12.
21. Kamalian R.R., On one-sided interval edge colorings of biregular bipartite graphs, Algebra and Discrete Mathematics, Vol. 19 (2015). Number 2, pp. 193 – 199.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունում հետազոտվում են գրաֆների այնպիսի ներկումներ (կողային, գագաթային), որոնցում գրաֆի գագաթների շրջակայքերի (կողային, գագաթային) վրա դրվում է որևէ լոկալ λ պայման: Հինգ տարբեր λ-ների համար դիտարկված են գրաֆների՝ λ պայմանին բավարարող, ներկումների գոյության, կառուցման, կառուցվածքների ուսումնասիրման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ: λ_1 (λ_2) պայմանը դրվում է գրաֆի գագաթի կողային շրջակայքի վրա, և պահանջում է, որպեսզի կողային ճիշտ ներկման մեջ գագաթի շրջակայքում օգտագործվող գույները կազմեն միջակայք (1-ից սկսվող միջակայք) բնական թվերի բազմության մեջ: λ_3 պայմանը նույնպես դրվում է գրաֆի գագաթի կողային շրջակայքի վրա, և պահանջում է, որպեսզի կողային ճիշտ ներկման մեջ գագաթի շրջակայքում օգտագործվող գույները կազմեն միջակայք, եթե ներկման մեջ մասնակցող բոլոր գույները ենթադրվում են դասավորված շրջանագծի վրա: λ_4 (λ_5) պայմանը դրվում է գրաֆի գագաթի գագաթային շրջակայքի (գագաթի գագաթային ընդլայնված շրջակայքի, երբ գագաթը համարվում է իր շրջակայքին պատկանող) վրա, և պահանջում է, որպեսզի գագաթների երկգույնանի ներկման մեջ գագաթի շրջակայքում տարբեր գույների գագաթների թվերը տարբերվեն ոչ ավել, քան 1-ով: λ պայմանի ($\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$) և կամայական բնական t-ի համար $\mathfrak{R}_{\lambda,t}$-ով նշանակենք այն գրաֆների բազմությունը, որոնց համար գոյություն ունի գրաֆի կողային ճիշտ ներկում $1,\ldots,t$ գույներով, որը բավարարում է λ պայմանին, և, դիցուք, $\mathfrak{R}_\lambda \equiv \bigcup_{t\geq 1} \mathfrak{R}_{\lambda,t}$. G գրաֆի համար նշանակենք $\Theta_\lambda(G) \equiv \{t \in \mathbb{N} / G \in \mathfrak{R}_{\lambda,t}\}$:

Ատենախոսության հիմնական նպատակն է տարբեր դասերի գրաֆների համար հետազոտել դրանց գագաթների շրջակայքերի (կողային, գագաթային) վրա դրված տարբեր լոկալ λ պայմաններին բավարարող ներկումների գոյության, կառուցման, կառուցվածքների ուսումնասիրման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ: Ուսումնասիրվող հիմնական խնդիրներն են՝

1. Տրված են G գրաֆը և λ պայմանը: Պարզել, $G \in \mathfrak{R}_\lambda$ թե ոչ,
2. Տրված է $G \in \mathfrak{R}_\lambda$ գրաֆը : Գտնել $\Theta_\lambda(G)$ բազմությունը:

Մեծ ուշադրություն է հատկացվում աշխատանքում նաև գրաֆների այնպիսի ներկումներին, որոնցում λ լոկալ պայմանի կատարումը պարտադիր է գրաֆի գագաթների բազմության որևէ R ենթաբազմության վրա: (Նշենք, որ

գրաֆի գագաթների ենթաբազմության անվան բացակայությունը նշանակումների ինդեքսներում նշանակում է, որ λ-ի կատարումը պահանջվում է գրաֆի գագաթների ամբողջ բազմության վրա:)

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. Գտնված է գրաֆի $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ դասին պատկանելու անհրաժեշտ պայման, և ապացուցված է համասեռ գրաֆի $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ դասին պատկանելիության խնդրի NP-լրիվությունը:
2. $G \in \mathfrak{R}_{\lambda_1,t}$ պայմանի առկայության դեպքում գտնված են G գրաֆի տարբեր պարամետրերով արտահայտվող գնահատականներ t-ի համար:
3. Որոշ դասերի համասեռ G գրաֆների համար (K_n լրիվ գրաֆների, $H_{2n-2,2n}$ խարարիի գրաֆների, ընդհանրացված ցիկլերի, լրիվ համասեռ k-կողմանի գրաֆների) ստացված են $\mathfrak{R}_{\lambda_1}$ դասին պատկանելիության պայմաններ, և $G \in \mathfrak{R}_{\lambda_1,t}$ պայմանից հետևող գնահատականներ t-ի համար:
4. Ապացուցված է, որ եթե G-ն լրիվ երկկողմանի գրաֆ է կամ ծառ, ապա $G \in \mathfrak{R}_{\lambda_1}$, և գտնված են t-ի բոլոր հնարավոր արժեքները, որոնց դեպքում $G \in \mathfrak{R}_{\lambda_1,t}$:
5. Բացահայտված է կամայական լրիվ երկկողմանի գրաֆի λ_1 պայմանին բավարարող կամայական ներկման կառուցվածքը:
6. Նկարագրված են լրիվ գրաֆի գագաթների բազմության բոլոր այն R ենթաբազմությունները, որոնց դեպքում գոյություն ունի գրաֆի՝ միայն R-ի գագաթների համար λ_1 պայմանին բավարարող կողային ճիշտ ներկում:
7. Որոշ դասերի համասեռ գրաֆների և երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆների համար գտնված են ստորին գնահատականներ գրաֆի գագաթների բազմության այնպիսի R ենթաբազմության հզորության համար, որի պարագայում գրաֆն ունի λ_1, λ_2 պայմանները R-ի բոլոր գագաթների վրա ապահովող կողային ճիշտ ներկումներ:
8. Ապացուցված է, որ կամայական երկկողմանի գրաֆ ունի այնպիսի կողային ճիշտ ներկում, որի դեպքում λ_1 պայմանը կատարվում է գրաֆի «կողմերից» մեկի բոլոր գագաթների համար, և առաջարկված է բազմանդամային ալգորիթմ համապատասխան ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր նվազագույն թիվը վերևից գնահատելու համար:
9. Ապացուցված է, որ եթե G-ն պարզ ցիկլ է կամ ծառ, ապա $G \in \mathfrak{R}_{\lambda_3}$, և գտնված են t-ի բոլոր հնարավոր արժեքները, որոնց դեպքում $G \in \mathfrak{R}_{\lambda_3,t}$:
10. Ապացուցված է, որ երկկողմանի գրաֆների համար λ_4 և λ_5 պայմաններին բավարարող երկգույնանի գագաթային ներկման գոյության խնդիրները NP-լրիվ են:

RESUME

Graph colorings (edge,vertex) are investigated with some local condition λ which is put on neighbourhoods (edge, vertex) of vertices. For five different λ, problems of the existence, construction, structure investigations and estimations of numeric parameters of graph colorings satisfying such λ are considered. The condition λ_1 (λ_2) is applied in proper edge colorings, is put on the edge neighbourhood of a vertex of the graph, and requires that colors used for edges incident to any vertex of the graph to form an interval (interval beginning from 1) of integers. The condition λ_3 is applied in proper edge colorings, is put on the edge neighbourhood of a vertex of the graph, and requires that colors used for edges incident to any vertex of the graph to form an interval when all colors are supposed to be arranged on a circle. The condition λ_4 (λ_5) is applied in bicolor vertex colorings, is put on the vertex neighbourhood (extended vertex neighbourhood in which the vertex itself is also included) of a vertex of the graph, and requires that the numbers of different colors used in the neighbourhood of any vertex of the graph to differ from each other by at most 1. For a condition λ ($\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$) and an arbitrary positive integer t, $\mathfrak{R}_{\lambda,t}$ denotes the set of graphs for which there exists a proper edge coloring with colors $1,\ldots,t$ satisfying the condition λ, and let $\mathfrak{R}_{\lambda} \equiv \bigcup_{t \geq 1} \mathfrak{R}_{\lambda,t}$; for a graph G, let $\Theta_{\lambda}(G) \equiv \{t \in \mathbb{N} / G \in \mathfrak{R}_{\lambda,t}\}$.

The aim of the dissertation is the investigation of the problem of existence, construction, structure and estimation of numerical parameters of colorings for various local conditions λ that are imposed for (edge, vertex) neighborhoods of the vertices of some graphs. The main investigated problems are following:

1. for a given graph G and condition λ, determine whether $G \in \mathfrak{R}_{\lambda}$ or not;
2. for a given graph $G \in \mathfrak{R}_{\lambda}$, find the set $\Theta_{\lambda}(G)$.

In this work significant attention is also paid to colorings of graphs such that the satisfaction of the local condition λ is imposed on some subset R of vertices of the graph. (In that case, the absence of indication of the subset of vertices of the graph in

the notations means that the satisfaction of λ is required on the whole set of its vertices).

The following results are obtained.

1. A necessary condition is found for a graph to belong to $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$; for a regular graph it is proved that the problem of deciding whether it belongs to $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$ or not is NP-complete.

2. For arbitrary and bipartite graphs G from $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$ estimates expressed via different parameters of the graph are found for t when the condition $G \in \mathfrak{N}_{\lambda_1,t}$ is satisfied.

3. For some regular graphs G (complete graphs K_n, Harary's graphs $H_{2n-2,2n}$, generalized cycles, complete regular k-sided graphs) conditions are obtained for belonging to $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$, and estimates are found for t when the condition $G \in \mathfrak{N}_{\lambda_1,t}$ is satisfied.

4. It is proved that if G is isomorphic to a complete bipartite graph or a tree then G belongs to $\mathfrak{N}_{\lambda_1}$, and all possible values of t are found for which $G \in \mathfrak{N}_{\lambda_1,t}$.

5. For any complete bipartite graph, a structure of an arbitrary coloring satisfying the condition λ_1 is described.

6. All possible subsets R of the set of vertices of a complete graph are described for which there exists a proper edge coloring of the graph satisfying the condition λ_1 exclusively for vertices of R.

7. For some regular graphs and for biregular bipartite graphs, lower bounds are found for the cardinality of such subset R of vertices of the graph for which there are proper edge colorings satisfying the conditions λ_1, λ_2 for all vertices of R.

8. It is proved that any bipartite graph has a proper edge coloring satisfying the condition λ_1 for all vertices of one "side", and a polynomial algorithm is proposed to find an upper bound for the least possible number of colors in such colorings.

9. It is proved that if G is isomorphic to a simple cycle or a tree then G belongs to $\mathfrak{N}_{\lambda_3}$, and all possible values of t are found for which $G \in \mathfrak{N}_{\lambda_3,t}$.

10. For bipartite graphs, the NP-completeness of the problem of the existence of a bicolor vertex coloring satisfying the condition λ_4 (λ_5) is proved.